

Teknologiledelse - Økonomi

Komepdium basert på forelesningsnotater fra våren 2012

Einar Baumann

11. mai 2012

Dette kompendiumet er basert på notatene mine fra forelesningene mine i faget. Noen av notatene, mer spesifikt de om produksjonsteori og regnskap, er skrevet av fra andre fordi mine egne var elendige der.

Jeg har prøvd å renskrive ting, og utdype der jeg selv trengte det, men det er fortsatt noen få ting som ikke gir mening i det hele tatt for meg: disse er markert med fotnoter. Fint hvis noen kan bekrefte eller avkrefte de tingene.

Innhold

I. Produksjonsteori	5
1. Kostnader og inntekter	6
1.1. Kostnader	6
1.1.1. Totalkostnad (TC), faste kostnader (FC), variable kostnader (VC) og gjennomsnittskostnader (AC)	6
1.1.2. Marginalkostnad (MC)	6
1.1.3. Beslutningsrelevante kostnader	6
1.1.4. Minimale gjennomsnittskostnader	6
1.2. Inntekter og etterspørsel	7
1.2.1. Marginalinntekt	8
1.2.1.1. Tolkning av marginalinntekt	8
1.2.2. Price Elasticity of Demand (PED) – Etterspørsel elastisitet	8
1.2.3. Profitt	8
1.2.3.1. Maksimering av profitt	9
1.2.3.2. Profitt og elastisitet	9
1.2.3.3. Markup/avanse	9
2. Markedsformer	10
2.1. Fri konkurranse	10
2.2. Monopol	11
2.2.1. Samfunnsøkonomisk lønnsomhet	12
2.2.1.1. Konsumentoverskudd	12
2.2.1.2. Produsentoverskudd	13
2.2.1.3. Samfunnsøkonomisk overskudd	14
2.2.1.4. Dødvektstap	15
2.3. Oligopol	16
2.3.1. Cournot duopoler, reaksjonsfunksjoner og Nash-likevekt	17
2.3.2. Nash-likevekt	17
2.3.2.1. Nash-likevekt for monopol og fri konkurranse	18
2.3.2.2. Spesielle produksjonsmengder i et oligopol	18

II. Regnskap	20
3. Regnskap	21
3.1. Eksternt regnskap (finansregnskap)	21
3.1.1. Resultatregnskap	21
3.1.2. Balanse	21
3.2. Internt regnskap (driftsregnskap)	21
4. Utvalgte nøkkeltall	22
4.1. Rentabilitet	22
4.2. Likviditet	22
4.3. Giring	22
III. Investeringsanalyse	23
5. Tidsverdi av penger	24
5.1. Nåverdi	24
5.2. Nettonåverdi	24
5.2.1. Relevant kontantstrøm	25
5.2.2. Grunnlaget for <i>NNV</i> som beslutningskriterium	25
5.3. Internrente (IRR)	25
6. Risiko	27
6.1. Markedsprising av risiko	27
6.1.1. Mål på risiko	27
6.1.2. Porteføljerisiko	27
6.2. Diversifisering	28
6.2.1. Øvre grense for diversifisering	28
6.3. β : Mål på økning i risiko som følge av en ny investering	29
6.3.1. Estimering av β	29
6.4. Capital Asset Pricing Model (CAPM) / Kapitalverdimodellen (KVM)	30
6.4.1. Kapitalmarkedslinjen	30
6.5. Selskapets kapitalkostnad - WACC (After tax Weighted Average Cost of Capital)	32
6.6. Modigliani og Miller - Kapitalstruktur og verdi	33
IV. Symboler og regneregler	34
7. Nyttige regnerelger	35
7.1. Nåverdi (rekker)	35
7.2. Risiko (Varians og kovarians)	35
8. Symboler	36

Del I.

Produksjonsteori

1. Kostnader og inntekter

1.1. Kostnader

1.1.1. Totalkostnad (TC), faste kostnader (FC), variable kostnader (VC) og gjennomsnittskostnader (AC)

Totalkostnaden $TC(Q)$ er den totale kostnaden for noe; i.e. summen av *faste kostnader* FC som er uavhengige av produksjonsmengden Q og *variable kostnader* $VC(Q)$ som er avhengige av Q . Videre er *gjennomsnittskostnaden* gitt som

$$AC = \frac{TC}{Q} \quad (1.1)$$

1.1.2. Marginalkostnad (MC)

Definisjon 1. *Marginalkostnaden* er kostnaden for å produsere én ekstra enhet, og er gitt fra formelen

$$MC(Q) = \frac{\partial TC}{\partial Q} \quad (1.2)$$

1.1.3. Beslutningsrelevante kostnader

- *Alternativkostnader*, i.e. tapet ved å ikke utnytte beste alternativ, er ofte beslutningsrelevante.
- Kostnader som har påløpt eller vil påløpe uansett er *ikke* beslutningsrelevante.

1.1.4. Minimale gjennomsnittskostnader

Vi ønsker å finne produksjonsmengden som minimerer gjennomsnittskostnadene. Dette kan gjøres med enkel kalkulus:

$$\frac{\partial AC}{\partial Q} = 0$$

setter inn formel (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{TC}{Q} \right) &= 0 \\ \frac{\frac{\partial TC}{\partial Q} Q - TC}{Q^2} &= 0 \end{aligned}$$

setter videre inn formel (1.2) og ender opp med

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q} (MC - AC) &= 0 \\ MC &= AC\end{aligned}$$

Ser altså at gjennomsnittskostnadene er minimert når marginalkostnaden er lik gjennomsnittskostnaden.

1.2. Inntekter og etterspørsel

Den totale inntekten, TR , er anhengig av produksjonsmengden Q etter følgende formel

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = Q(P) \cdot P \quad (1.3)$$

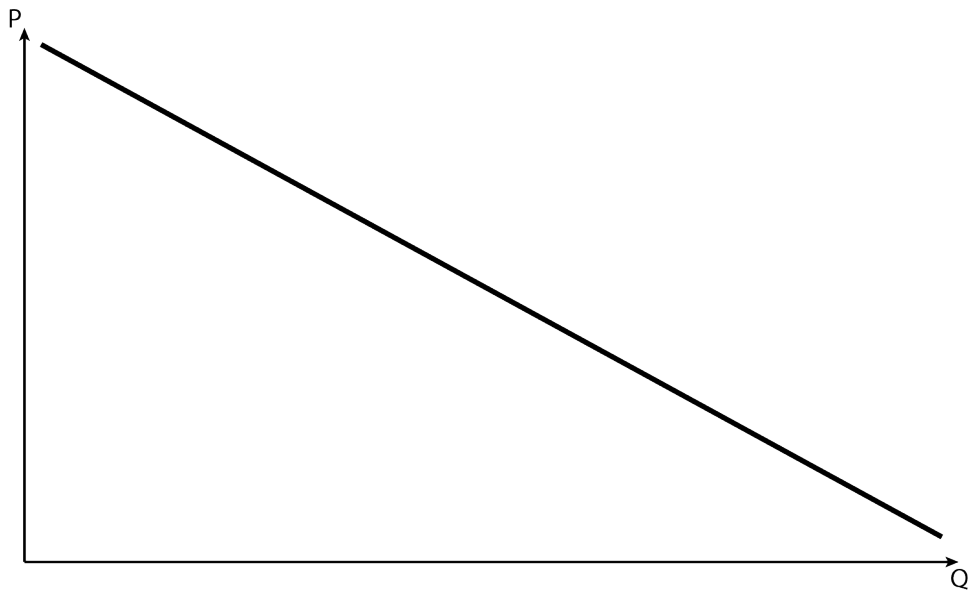
der $P(Q)$ er prisen pr. enhet, og $Q(P)$ er *etterspørselen*, i.e. mengden som kan selges til en bestemt pris P .

Normalt har man at

$$\frac{\partial P}{\partial Q} < 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P} < 0 \quad (1.5)$$

med andre ord: økt pris gir lavere etterspørsel; økt etterspørsel gir lavere pris. Dette er illustrert i figur 1.1.



Figur 1.1.: Grafen viser hvordan prisen P synker med økende produksjonsmengde Q .

1.2.1. Marginalinntekt

Definisjon 2. *Marginalinntekten* er økningen i inntekt man oppnår ved å selge én ekstra enhet.

Marginalinntekten kan beregnes fra følgende formel

$$MR(Q) = \frac{\partial TR}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial Q}Q + P \quad (1.6)$$

Eksempel 1. Har gitt en totalinntekt på formen $TR = P(Q) \cdot Q = (5000 - Q) \cdot Q$. Dette gir en marginalinntekt på $MR = 5000 - 2Q$.

1.2.1.1. Tolkning av marginalinntekt

- $\frac{\partial P}{\partial Q}$ (negativ iht. formel (1.4)) er prisreduksjonen på hver av alle produserte enheter som følge av økt produksjon.
- $\frac{\partial P}{\partial Q}Q$ er den totale prisreduksjonen på alle enheter til sammen.
- P er inntekten fra den ekstra enheten.

MR er altså summen av to effekter: ett bidrag til reduksjon og ett bidrag til økning.

1.2.2. Price Elasticity of Demand (PED) – Etterspørselsselastisitet

Den prosentvise endringen i etterspurt mengde pr. prosentvis endring i pris, ε , er et mål på etterspørselsselastisiteten i markedet, og kan beregnes fra

$$\varepsilon = -\frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} \quad (1.7)$$

Definisjon 3. Man sier at etterspørselen er *elastisk* dersom $\varepsilon > 1$ og *uelastisk* dersom $\varepsilon < 1$.

Dersom man setter formel (1.7) inn i formelen for marginalinntekt, formel (1.6), får man at

$$MR = P \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (1.8)$$

dermed har man altså at

- hvis $\varepsilon > 1$ så er $MR > 0$. Man vil altså tjene mest på å *øke* produksjonen dersom etterspørselen er elastisk.
- hvis $\varepsilon < 1$ så er $MR < 0$. Man vil altså tjene mest på å *redusere* produksjonen dersom etterspørselen er uelastisk.

1.2.3. Profitt

Definisjon 4. *Profitten* π er gitt som differansen mellom totalinntekten og totalkostnadene.

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \quad (1.9)$$

1.2.3.1. Maksimering av profitt

Man antar gjerne at bedrifter ønsker å maksimere profitten sin. dette gjøres enkelt med derivasjon:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial Q} &= 0 \\ \frac{\partial TR}{\partial Q} &= \frac{\partial TC}{\partial Q} \\ MR &= MC\end{aligned}$$

og vi ser altså at profitten er maksimert når produksjonsmengden er slik at marginalinntekten er lik marginalkostnaden. Dersom bedrift har $MR \neq MC$ kan man øke profitten ved å

- øke produksjonen dersom $MR > MC$.
- redusere produksjonen dersom $MR < MC$.

1.2.3.2. Profitt og elastisitet

Tar her utgangspunkt i at profitten er maksimert, i.e.

$$MR = MC$$

Innsetting av formel (1.8) for MR gir da at

$$MC = P \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (1.10)$$

Ser at dersom $MC > 0$ må $\varepsilon > 1$ (gitt $P > 0$); i.e. en bedrift med positiv marginalkostnad vil tilpasse seg slik at etterspørselen blir elastisk.

Kan også se at $MR = P$ dersom etterspørselen er uendelig elastisk:

$$MR = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} P \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = P \quad (1.11)$$

1.2.3.3. Markup/avanse

Definisjon 5. Dersom formel (1.10) omformes på følgende måte

$$\frac{P - MC}{P} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.12)$$

så kaller man $\frac{P-MC}{P}$ -leddet for *markup* eller *avanse*.

2. Markedsformer

Antall bedrifter i markedet			
1	2	en del	mange (∞)
Monopol	Duopol		Fri (perfekt) konkurranse
	Oligopol		

2.1. Fri konkurranse

Definisjon 6. I et marked med *fri konkurranse* er det mange som tilbyr like produkter, og hver tilbyder har en liten markedsandel.

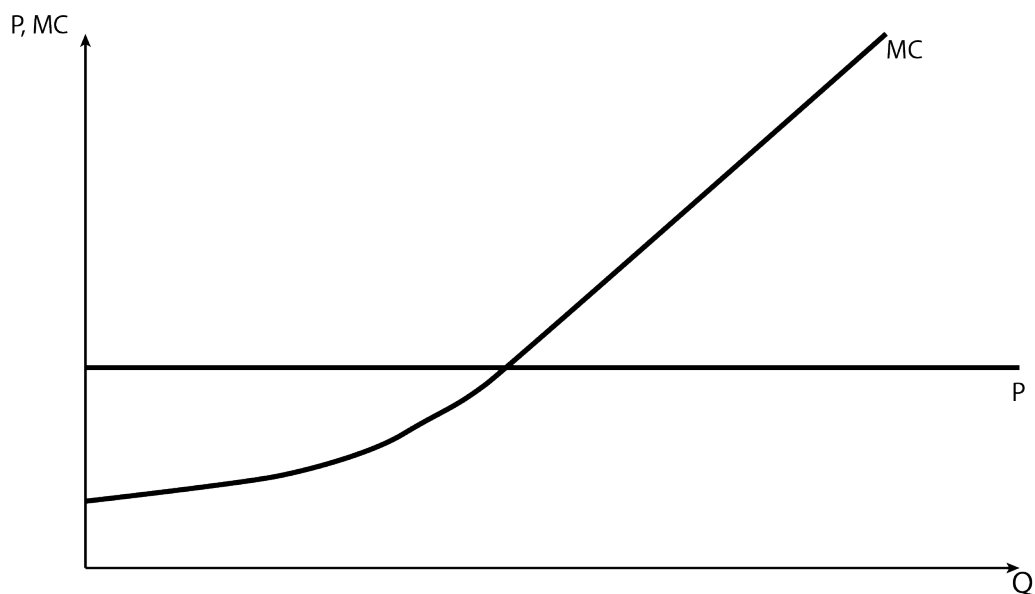
Produktene som tilbys i et fritt marked er homogene sett fra kjøperens side, som derfor foretar valg kun basert på pris. Hvert produkt oppfyller prisen gitt av markedet; prisen er derfor uavhengig av produksjonsmengden. Dersom prisen på produktet er over markedsprisen blir etterspørselen 0; dersom prisen er under markedsprisen blir etterspørselen uendelig stor.

Man antar i tillegg uendelig elastisitet, $\varepsilon = \infty$; og fra antagelsen i avsnittet over har man at $\frac{\partial P}{\partial Q} = 0$. Dette, i kombinasjon med formel (1.10), gir at

$$P = MC \tag{2.1}$$

i et fritt marked. Dette er illustrert i figur 2.1¹

¹Merk at jeg er usikker på forklaringen i figurteksten på hva MC linja egentlig er: den grafen gir ikke helt mening for meg i ettertid. Setter pris på en epost med forklaring, hvis noen har en.



Figur 2.1.: Linjen P viser prisen i et fritt marked, linjen MC viser marginalkostnaden i et ikke-fritt marked.

2.2. Monopol

Definisjon 7. I et *monopol* er det kun én produsent, hvis produkt ikke har noen nære substitutter.

I et monopol har man, i motsetning til i et fritt marked, endelig elastisitet: man kan ikke sette prisen uendelig høyt og forvente etterspørsel²

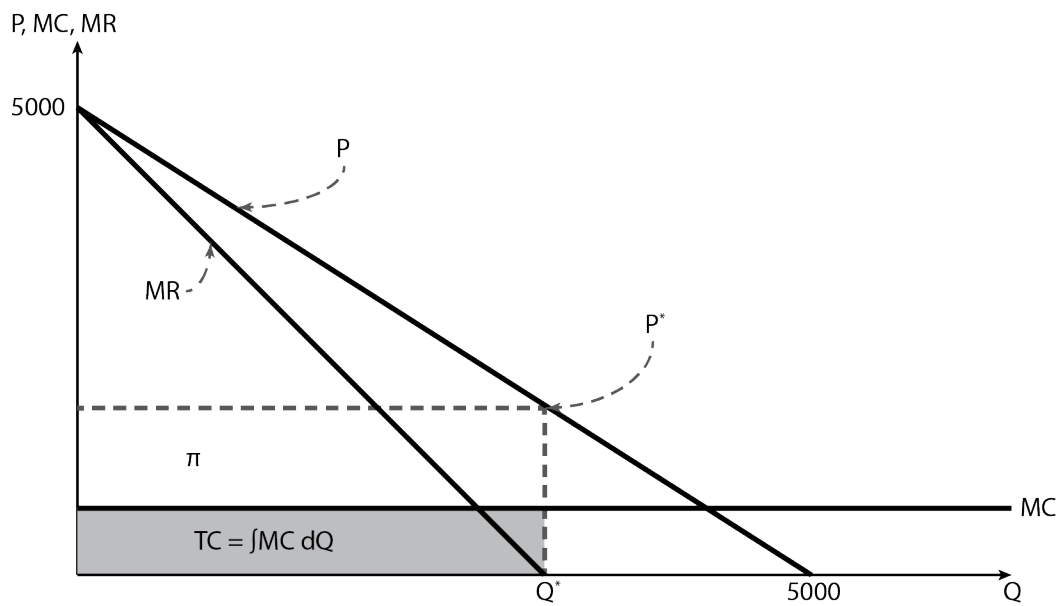
Et monopol vil *marginalisere*, i.e. forholde seg til en marginalinntekt som ikke samfaller med etterspørselen; formelen $MR = MC$ for maksimering av profitt må derfor tilpasses. Den maksimale profitten for et monopol er gitt ved

$$\pi = P^*Q^* - TC \quad (2.2)$$

Et eksempel på dette er vist i Eksempel 2 med tilhørende figur 2.2.

Eksempel 2. Har gitt en bedrift med $P = 5000 - Q$; $MR = 5000 - 2Q$; $MC = 800$. Et plott med beskrivelser er vist i figur 2.2.

²Dette gir ingen mening for meg. Folk har da ikke noe annet alternativ enn å kjøpe det dyre produktet?



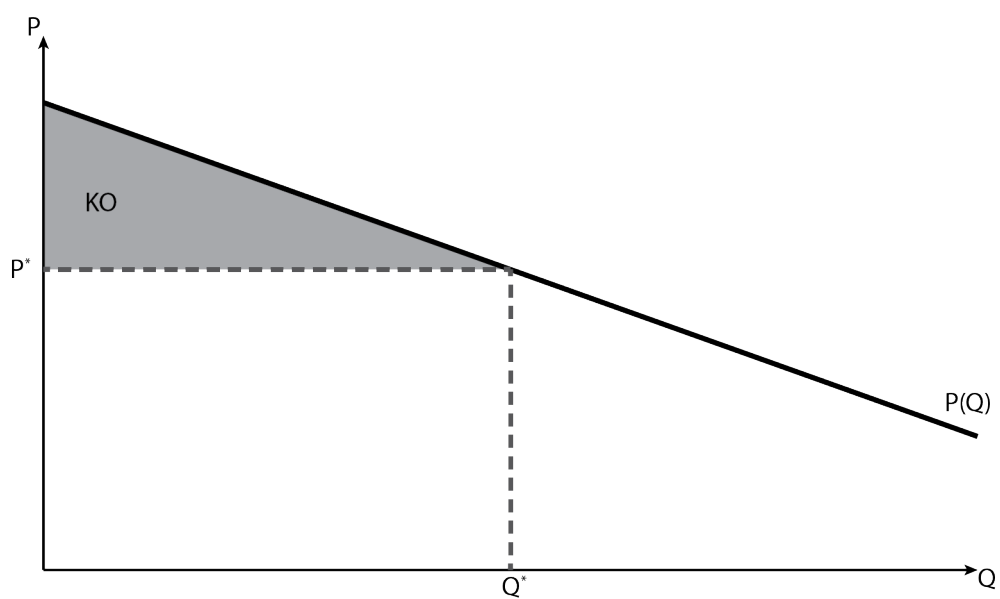
Figur 2.2.: Plottet viser hvordan man beregner ulike ting i et monopol. Nærmere beskrivelser er gitt i 2.

2.2.1. Samfunnsøkonomisk lønnsomhet

2.2.1.1. Konsumentoverskudd

Definisjon 8. Konsumentoverskudd = Maksimal betalingsvillighet – Faktisk betaling.
Se figur 2.3.

$$KO = \int_0^{Q^*} P(Q) dQ - P^* Q^* \quad (2.3)$$

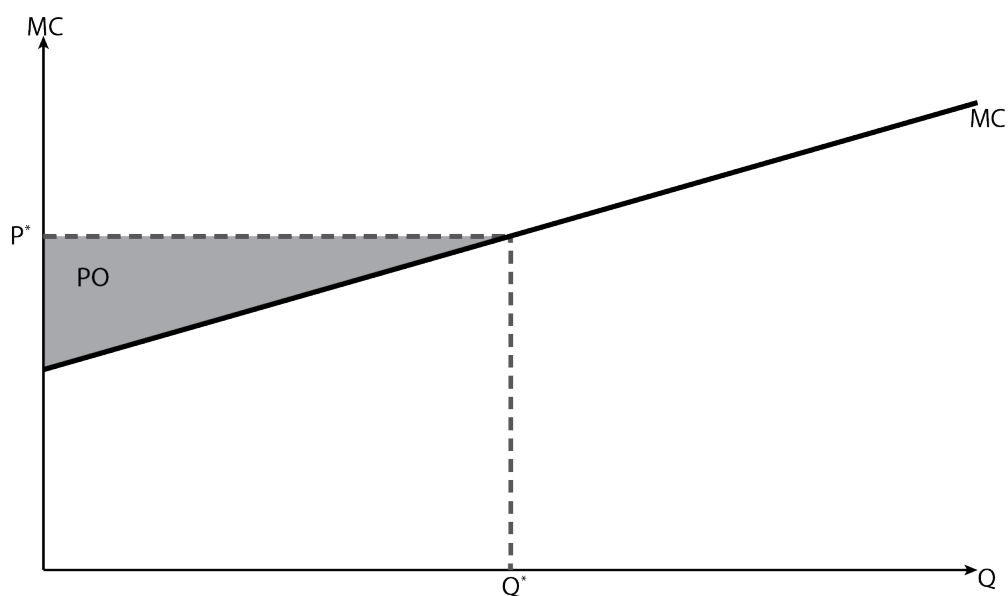


Figur 2.3.: Plottet viser verdiorrådet som regnes som konsumentoverskudd.

2.2.1.2. Produsentoverskudd

Definisjon 9. Produsentoverskudd = Inntekter – Kostnader. Se figur 2.4.

$$PO = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} M(Q) dQ \quad (2.4)$$

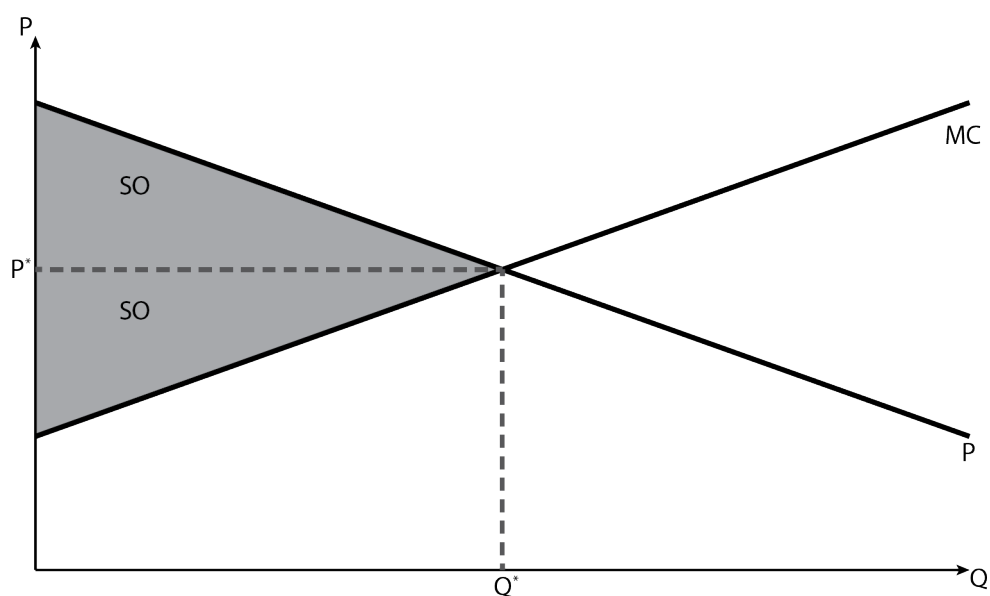


Figur 2.4.: Plottet viser verdiområdet som regnes som produsentoverskudd.

2.2.1.3. Samfunnsøkonomisk overskudd

Definisjon 10. Det samfunnsøkonomiske overskuddet er summen av konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet.

$$SO = KO + PO = \int_0^{Q^*} P(Q) dQ - \int_0^{Q^*} MC(Q) dQ \quad (2.5)$$

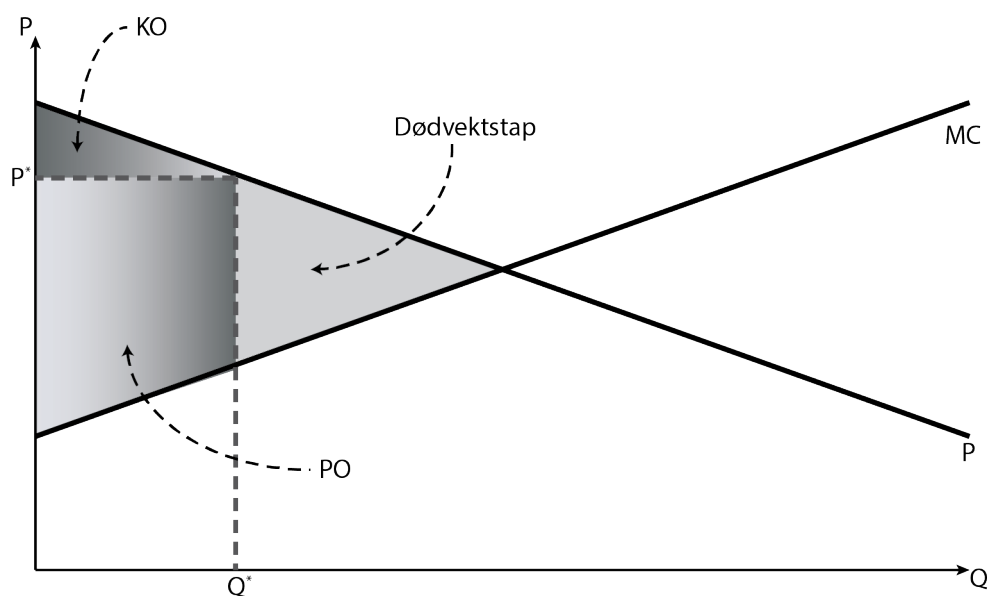


Figur 2.5.: Plottet viser verdiorrådet som regnes som samfunnsøkonomisk overskudd.

2.2.1.4. Dødvektstap

Definisjon 11. *Dødvektstap* er tapt samfunnsøkonomisk overskudd som følge av avvik fra frikonkuransetilpasningen $P = MC$. Verdiorrådet som regnes som dødvektstap er vist i figur 2.6.

Merknad 1. *Patenter* er et godt eksempel på monopol som gir et visst dødvektstap, men som er samfunnsøkonomisk lønnsomt på lang sikt.



Figur 2.6.: Plottet viser verdiområdet som regnes som dødvektstap.

2.3. Oligopol

Definisjon 12. I et *oligopol* er antallet produsenter større eller lik to, men færre enn ved fri konkurranse, og godene som produseres kan være homogene eller differensierte.

Det finnes flere oligopol modeller:

Cournot: Bedriftene maksimerer sin egen profitt ut fra at andre bedrifter sin produksjonsmengde Q er kjent. De konkurrerende bedriftene justerer produksjonsmengdene sine samtidig.

Beltrand: Bedriftene maksimerer sin egen profitt ut fra at andre sin produksjonsmengde Q og pris P er kjent.

Stackelberg: Som Cournot-modellen, men bedriftene justerer produksjonsmengdene sine etter tur.

Alle de nevnte oligopol modellene bygger på et sentralt begrep innenfor spillteori: *Nash-likevekt* for ikke kooperative spill.

Definisjon 13. Vi har Nash likevekt dersom alle spillere er fornøyde med sin egen strategi, gitt alle andre spilleres strategier.

2.3.1. Cournot duopoler, reaksjonsfunksjoner og Nash-likevekt

I en *Cournot-duopol* produserer to bedrifter, bedrift 1 og 2, med lik marginalkostnad MC , ett homogent gode med etterspørsel gitt fra

$$P = A - BQ \quad (2.6)$$

der A og B er konstanter.

Ulike mengder Q_1 og Q_2 produseres, slik at

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (2.7)$$

$$P = A - B(Q_1 + Q_2) \quad (2.8)$$

Profitten til bedrift 1 er da gitt ved

$$\pi_1 = [A - B(Q_1 + Q_2)] Q_1 - MC \cdot Q_1 \quad (2.9)$$

Denne profitten vi bedriften maksimere. Det gjøres ved finne produksjonsmengden som gir høyest profitt, i.e. løse $\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0$ mhp. Q_1 . Resultatet følger:

$$Q_1(Q_2) = \frac{A - BQ_2 - MC}{2B} \quad (2.10)$$

Tilsvarende, for bedrift 2, har man at

$$Q_2(Q_1) = \frac{A - BQ_1 - MC}{2B} \quad (2.11)$$

Funksjonene $Q_1(Q_2)$ og $Q_2(Q_1)$ kalles *reaksjonsfunksjoner*.

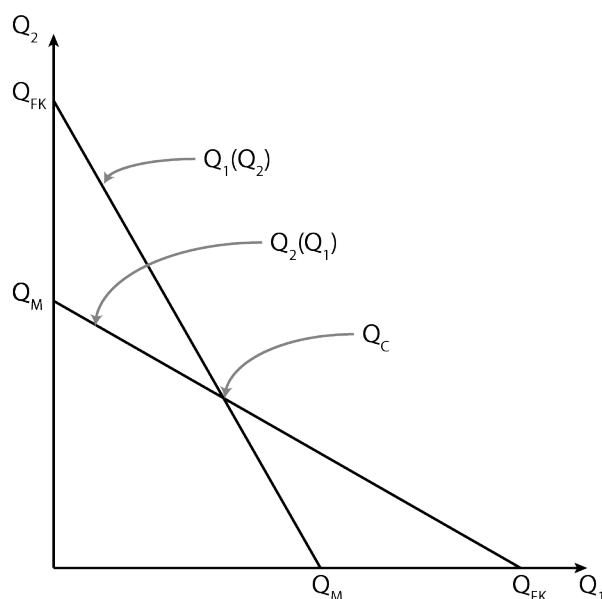
Definisjon 14. En *reaksjonsfunksjon* gir en gir en bedrifts beste svar på en annen bedrifts produksjonsmengde.

2.3.2. Nash-likevekt

Man har Nash-likevekt når begge bedrifter er på sin egen reaksjonsfunksjon. Denne likevekten finner man ved å sette den ene reaksjonsfunksjonen inn i den andre; sluttresultatet her er at Nash-likevekt er oppnådd når

$$Q_1 = Q_2 = Q_C = \frac{1}{3} \frac{A - MC}{B} \quad (2.12)$$

Denne likevekten er oppnådd i punktet C i figur 2.7.



Figur 2.7.: Plottet viser Nash-likevekt, som er oppnådd i punktet C . Q_M er produksjonsmengden ved monopol, Q_{FK} er produksjonsmengden ved frikonkurranse.

2.3.2.1. Nash-likevekt for monopol og fri konkurranse

Nash-likevekt kan også utledes for andre systemer enn oligopoli. Ser først på monopol. I et monopol har man at $MR = A - 2BQ$ og $MR = MC$, som sammen gir at $A - 2BQ = MC$, som omformet gir produksjonsmengden i likevekt for et *monopol*:

$$Q_M = \frac{1}{2} \frac{A - MC}{B} \quad (2.13)$$

For fri konkurranse har man tilsvarende at $P = MC$, som sammen med formel (2.6) gir at $A - 2BQ = MC$, som omformet gir produksjonsmengden ved *fri konkurranse*:

$$Q_{FK} = \frac{A - MC}{B} \quad (2.14)$$

2.3.2.2. Spesielle produksjonsmengder i et oligopol

Ser i denne underseksjonen på formel (2.10) og formel (2.11).

- Dersom man setter inn $Q_2 = 0$, får man at $Q_1 = Q_M = \frac{1}{2} \frac{A - MC}{B}$, altså monopolmengden.
- Dersom man setter inn Q_2 lik frikonkurransemengden, $Q_2 = Q_{FK} = \frac{A - MC}{B}$, får man at $Q_1 = 0$.

- Man ser at Nash-likevekt vil gi en høyere samlet produksjon

$$Q_{tot,C} = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{A - MC}{B} = \frac{2}{3} \frac{A - MC}{B}$$

enn dersom en av bedriftene produserer monopolmengden,

$$Q_{tot,M} = \frac{1}{2} \frac{A - MC}{B} + 0 = \frac{1}{2} \frac{A - MC}{B}$$

men lavere enn dersom produserer frikonkuransmengden

$$Q_{tot,FK} = \frac{A - MC}{B}$$

- Nash-likevekt gir altså lavere dødvektstap enn monopoli.

Del II.

Regnskap

3. Regnskap

3.1. Eksternt regnskap (finansregnskap)

3.1.1. Resultatregnskap

Resultatregnskapet består av

- Inntekter.
- Kostnader.
- Overskudd.

3.1.2. Balanse

En *balanse* er en oversikt over et selskaps verdier på formen

Eiendeler (<i>aktiva</i>)	Egenkapital og gjeld (<i>passiva</i>)
sum = verdi	sum = verdi

- Venstresiden (kontoklasse 1) viser enedeler kapitalen har blitt brukt på.
- Høyresiden viser hva eiendelene er finansiert med.
- Summen for hver kolonne er balansens *total kapital*.

Eksempel 3. Et eksempel på en balanse er som følger:

Aktiva	Passiva
Maskin (450)	Egenkapital (200)
Kontanter (50)	Pantelån (gjeld) (300)
Sum: 500	Sum: 500

3.2. Internt regnskap (driftsregnskap)

Et internt regnskap består av

- Perioderesultat.
- Budsjett.

Driftsregnskap tjener som et ytelsesmål og som motivasjon; det er frivillig og primært til økonomistyringsformål.

4. Utvalgte nøkkeltall

4.1. Rentabilitet

$$\text{Egenkapitalrenabilitet} = \frac{\text{Resultat}}{\text{Egenkapital}} \quad (4.1)$$

$$\text{Total kapitalrenabilitet} = \frac{\text{Resultatrentekostnader}}{\text{Total kapital}} \quad (4.2)$$

4.2. Likviditet

$$\text{Likviditetsgrad 1} = \frac{\text{Omløpsmidler}}{\text{Kortsiktig gjeld}} \quad (4.3)$$

$$\text{Likviditetsgrad 2} = \frac{\text{Mest likvide omløpsmidler}}{\text{Kortsiktig gjeld}} \quad (4.4)$$

4.3. Giring

$$\text{Gjeldgrad} = \frac{\text{Gjeld}}{\text{Egenkapital}} \quad (4.5)$$

$$\text{Egenkapitalandel} = \frac{\text{Egenkapital}}{\text{Sum eiendeler}} \quad (4.6)$$

Del III.

Investeringsanalyse

5. Tidsverdi av penger

Ivesteringsprosjekter innebærer typisk investering (kontantstrøm ut) først og overskudd (kontantstrøm inn) senere. For lønnsomhetsvurdering må kontantstrømi ulike tidsperioder summeres; men penger senere er mindre verdt enn penger nå.

5.1. Nåverdi

Definisjon 15. Gitt et prosjekt A som vurderes utført; og et prosjekt B som er det alternative prosjektet med høyest forventet avkastning. *Nåverdien* til prosjekt A er den investeringen som kreves i prosjekt B for få tilbake like mye penger etter den gitte tidsperioden som prosjekt A vil gi.

Eksempel 4. Hva er nåverdien av å få 1000 NOK om ett år, dersom forventet avkastning for beste alternative investering samme risiko (alternativ avkastning) er 5%?

$$NV \cdot (1 + 5\%) = 1000 \implies NV = 952.40$$

Forklaring: Dersom jeg har 952.4 NOK nå, og investerer de med en avkastning lik 5%, vil jeg ha 1000 NOK om ett år.

Mer formelle ligninger for nåverdi:

$$NV = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r_t)^t} = \frac{C_t}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right) \quad (5.1)$$

$$NV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r_t)^t} = \frac{C_t}{r} \quad (5.2)$$

Merknad 2. Forenklingene av summene gjelder kun ved konstant kontantstrøm og avkastning.

5.2. Nettonåverdi

Nettonåverdien til et prosjekt er gitt som summen av nåverdien til prosjektet som vurderes og den initielle kontantstrømmen til det beste alternativet:

$$NNV = C_0 + NV \quad (5.3)$$

Eksempel 5. Har en tomt verdt 500 000. Har muligheten til å bygge kontorlokaler for 3 000 000; de vil være verdt 4 000 000 om ett år.

Forventet avkastning for beste alternative investering med samme risiko er 12%.

Vil finne ut om prosjektet er lønnsomt.

$$NV = \frac{4000000}{1 + 0.12} = 3571429 \implies NNV = 3571429 - 3500000 = 71429$$

Ser altså at prosjektet er lønnsomt: det har en verdi på 71429 etter kapitalkostnader. Med andre ord: det andre prosjektet ville krevd en investering på 3.571426E6 for å få 4E6 tilbake om ett år. Kontorprosjektet krever en investering på 71429 mindre for å få 4E6 tilbake om ett år.

5.2.1. Relevant kontantstrøm

- Alle endringer i kontantstrøm pga. prosjektet, inkludert skatt.
- Alternativkostnader (avkastningen fra beste alternative prosjekt).
- *Ikke* kapitalkostnader, eg. renter og avdrag.

5.2.2. Grunnlaget for NNV som beslutningskriterium

1. Eierne ønsker
 - a) rikdom.
 - b) å fordele konsumet sitt over tid etter personlige preferanser.
 - c) å velge risikoprofil knyttet til konsum over tid.
2. b) og c) oppnår eierene på egenhånd dersom de bruker kapitalmarkedene.
3. Ledelsen i bedriften skal bare ha fokus på å maksimere verdien av bedriften. Det gjøres ved å finne investeringsmuligheter som er bedre enn alternativene for eierne; i.e. investeringer som gir $NNV > 0$.

5.3. Internrente (IRR)

Definisjon 16. Internrenten er diskonteringsrenten som gir $NNV = 0$.

$$\text{solve} \left(C_0 + \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r)^t} = 0, r \right) \quad (5.4)$$

Beslutningsregel: Gjennomfør prosjektet dersom $IRR > r_t$.

Internrente-beslutningsmodellen har noen vesentlige problemer:

- IRR kan gi feil prioritering dersom man har gjensidig utelukkende prosjekter. Et eksempel med to gjensidig utelukkende prosjekter A og B med tilhørende beregnet IRR følger:

Prosjekt	C_0	C_1	IRR	$NNV (r_t = 10\%)$
A	-10 000	20 000	100%	8 182
B	-20 000	35 000	75%	11 818

- Flere fortegnsskift for kontantstrømmen gir ikke-entydig IRR ; dette gjør at man kan få høy IRR for ulønnsomme prosjekter fordi fremtidige kostnader undervurderes.

6. Risiko

6.1. Markedsprising av risiko

6.1.1. Mål på risiko

Blant de vanligste målene på risiko er variansen, og spesielt standardavviket σ , til avkastningen.

$\tilde{r}$ Faktisk avkastning.

r Forventet avkastning.

Varians/forventet kvadratavvik $\text{Var}(\tilde{r}) = E[(\tilde{r}_i - r_i)^2]$, der $E(x)$ er forventningsverdien til x .

Standardavvik $STD(\tilde{r}) = \sigma_r = \sqrt{\text{Var}(\tilde{r})}$.

6.1.2. Porteføljerisiko

Definisjon 17 (Portefølje). En portefølje er en samling av ulike investeringer.

Definerer symboler:

x_i Andel av total investering gjort i aksje i .

σ_i^2 Varians for aksje i .

σ_{ij} Kovarians mellom aksje i og j .

Kovariansen mellom to aksjer beregnes fra en av to følgende ligninger:

$$\sigma_{ij} = E[(i - \bar{i})(j - \bar{j})] \quad (6.1)$$

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad (6.2)$$

der ρ_{ij} er korrelasjonskoeffisienten mellom aksje i og j : et mål på hvor mye j endrer seg når i endrer seg (og omvendt).

Porteføljevariansen av aksje 1 og aksje 2 kan beregnes fra følgende ligning:

$$\begin{aligned} \text{Var}(1, 2) &= x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} \\ &= x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2. Diversifisering

Forventet *avkastning* for en portefølje er det veide gjennomsnittet av forventede avkastninger for hver akje i porteføljen; men *risikoen* for porteføljen er mindre enn det veide gjennomsnittet av enkeltrisikoen for hver aksje. Dette er på grunn av *diversifiseringseffekten*.

6.2.1. Øvre grense for diversifisering

Vil se på hva som skjer med risikoen (variansen) når vi har en svært diversifisert aksjeportefolio; i.e. en portefolio med et stort antall forskjellige aksjer.

For N aksjer er variansen gitt ved

$$\text{Var}(1, 2, \dots, N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (6.4)$$

Antar videre at alle $x_i = \frac{1}{N}$. formel (6.4) kan da forenkles til

$$\text{Var}(1, \dots, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \quad (6.5)$$

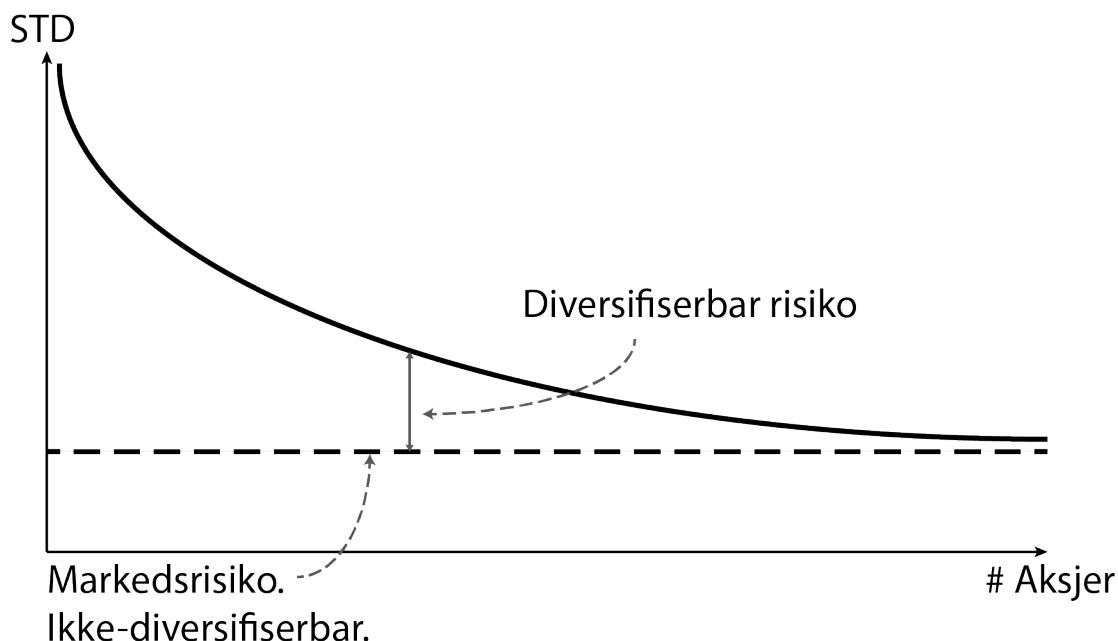
Det er N^2 ledd totalt; N av de er på formen σ_i^2 ; $N^2 - N$ av de er på formen $\sigma_{ij}, i \neq j$. La $\overline{\sigma_j^2}$ være gjennomsnittlig varians og $\overline{\sigma_{ij}}$ gjennomsnittlig kovarians. formel (6.5) kan da omskrives til

$$\begin{aligned} \text{Var}(1, \dots, N) &= \frac{1}{N^2} \left[N \overline{\sigma_i^2} + (N^2 - N) \overline{\sigma_{ij}} \right] \\ &= \frac{1}{N} \overline{\sigma_i} + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \overline{\sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

For et svært stort antall forskjellige aksjer har man da at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(1, \dots, N) = \overline{\sigma_{ij}} \quad (6.7)$$

Ser altså at for en tilstrekkelig stor N , så er variansen – og dermed risikoen – kun bestemt av gjennomsnittlig kovarians for markedet. Dette er illustrert i figur 6.1.



Figur 6.1.: Grafen illustrerer hva som skjer med risikoen (STD) når antallet forskjellige aksjer i en portfolio stiger. Den striplede linjen er den gjennomsnittlige kovariansen for markedet, den heltrekte er standardavviket, altså risikoen, for portefolien.

6.3. β : Mål på økning i risiko som følge av en ny investering

Definisjon 18. β for en investering inv er definert som

$$\beta = \frac{\text{Cov}(inv, M)}{\text{Var}(M)} \quad (6.8)$$

der M er porteføljen – gjerne markedsporteføljen.

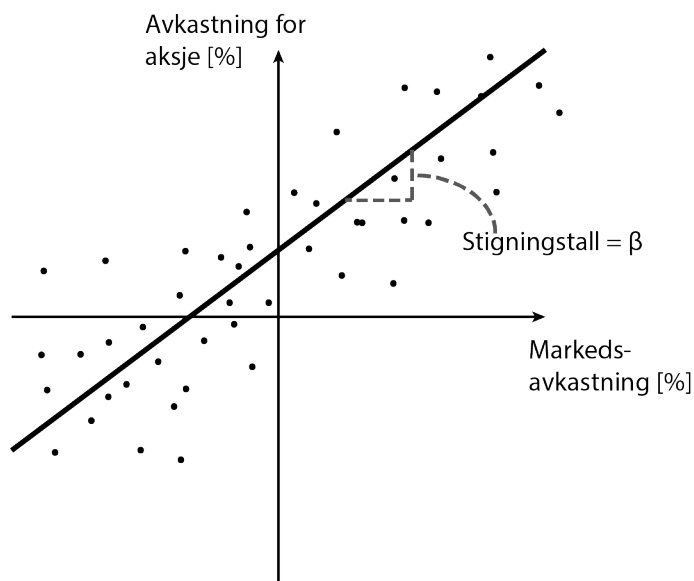
Dersom porteføljen M er godt diversifisert har vi videre at variansen til M er lik den gjennomsnittlige kovariansen til markedet:

$$\text{Var}(M) \approx \overline{\text{Cov}} \quad (6.9)$$

β ganger andelen investert i investeringen inv , $\beta \cdot x_{inv}$, angir da hvor mye av den gjennomsnittlige kovariansen til porteføljen som kommer fra investeringen inv .

6.3.1. Estimering av β

En måte å estimere β er å foreta lineær regresjon med markedsavkastning som uavhengig og aksjeavkastning som avhengig variabel. Stigningstallet til regresjonslinjen er da β . Dette er illustrert i figur 6.2.



Figur 6.2.: Figuren viser et scatter-plott av avkastningen for aksjen mot markedsavkastningen, med tilhørende regresjonslinje.

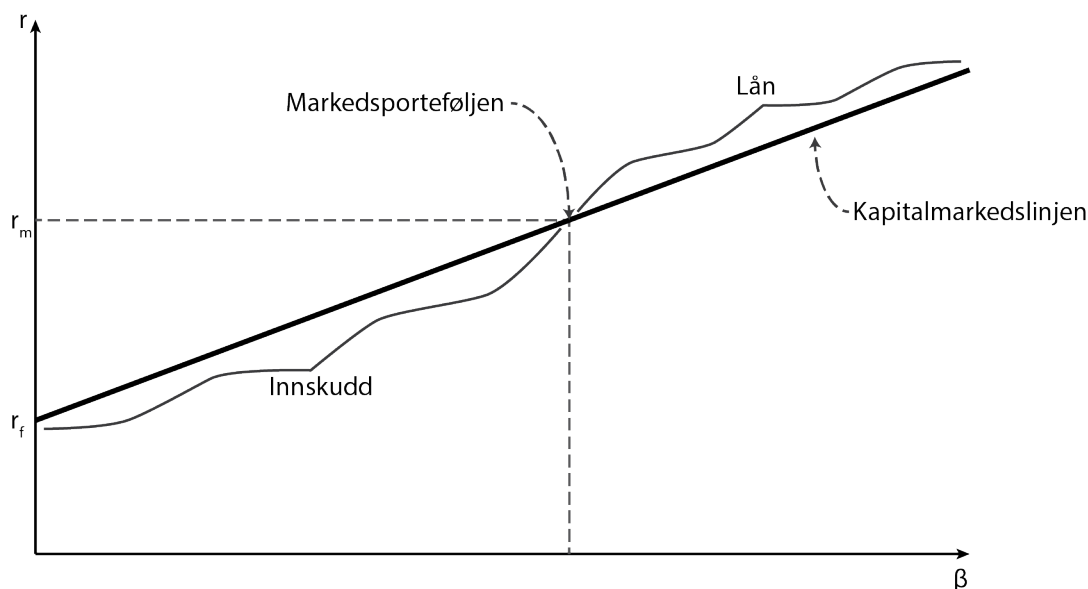
Eksempel 6. Et selskap med $\beta = 2$ vil ha dobbelt så stort utslag som markedet. E.g. en 1% økning i markedet vil resultere i en 2% økning for selskapet; 1% nedgang i markedet vil gi 2% nedgang for selskapet.

6.4. Capital Asset Pricing Model (CAPM) / Kapitalverdimodellen (KVM)

Investorer ønsker høy forventet avkastning i forhold til risiko; de vil derfor diversifisere, og det beste de kan oppnå er å ligge på *kapitalmarkedslinjen*.

6.4.1. Kapitalmarkedslinjen

Kapitalmarkedslinjen er vist i figur 6.3.



Figur 6.3.: Avkastningen r plottet mot β . r_m er forventet markedsavkastning, r_f er risikofri rente.

Generelt ligger alle aksjer ca. på kapitalmarkedslinjen. Dette kommer av flere årsaker:

- Hvis en aksje ligger under kapitalmarkedslinjen, vil en portefølje uten den være bedre; investorer vil derfor selge aksjen inntil forventet avkastning har økt nok til at aksjen igjen ligger på kapitalmarkedslinjen.
- Vice versa for aksjer som ligger over linjen.

Merknad 3. Dette holder kun så lenge investorene er risikoaverse.

Risikopremien til hvert verdipapir er gitt ved kapitalmarkedslinjen:

$$\underbrace{r - r_f}_{\text{Risiko-}} = \beta \underbrace{(r_m - r_f)}_{\text{Risikopremie i markedet}} \implies r = r_f + \beta (r_m - r_f) \quad (6.10)$$

Generelt bestemmes risikoen i porteføljen av β :

σ_M Standardavviket til markedet.

σ_f Standardavviket til r_f .

ρ_{Mf} Korrelasjonskoeffisienten mellom markedet og r_f .

α Andel investert i markedet.

$$STD = \sqrt{\alpha^2 \sigma_M^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_f^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho_{Mf} \sigma_M \sigma_f} \quad (6.11)$$

Tabell 6.1.: Balanse for en tenkt bedrift.

Aktiva (A)	Passiva
Realinvesteringer	Egenkapital (E)
$\vdots$	Gjeld (D)
Verdi (V)	Verdi (V)

$\sigma_f = 0$ nettopp fordi det er *risikofri* rente; dermed er også $\rho_{Mf} = 0$. Dermed forenkles formel (6.11) til

$$STD = \alpha \sigma_M \quad (6.12)$$

Eksempel 7. $\beta = 2 \implies \alpha = 2 \implies STD = 2\sigma_M$.¹

6.5. Selskapets kapitalkostnad - WACC (After tax Weighted Average Cost of Capital)

Bruk av et fast avkastningskrav som WACC for investeringer med ulik markedsrisiko (ulik β) kan gi feil beslutninger. Selskapets kapitalkostnad (WACC) kan/bør likevel brukes i en del tilfeller:

- For prosjekter som har tilnærmet samme risiko som selskapet selv.
- Som utgangspunkt for mange andre prosjekter.

Det er to ting man tar hensyn til i WACC-beregningen; det første er at selskaper er finansiert av både egenkapital og gjeld (se tabell 6.1), og avkastningen fordeles til egenkapital og gjeld etter følgende ligning

$$\begin{aligned} V \cdot r_A &= D \cdot r_D + E \cdot r_E \\ \implies r_A &= \frac{D}{V} r_D + \frac{E}{V} r_E \end{aligned} \quad (6.13)$$

der r_A er avkastningen på aktiva, r_D er gjeldsrenta og r_E er avkastningen på egenkapital. Risikoen til aktiva er gitt ved

$$\beta_A = \frac{D}{V} \beta_D + \frac{E}{V} \beta_E \quad (6.14)$$

Det andre man tar hensyn til i WACC-beregningen er at kontantstrøm som betales ut som renter ikke skattes på selskapets hånd; dermed er den effektive renten etter skatt $r_D (1 - T_C)$, der T_C er selskapsskattesatsen. Dersom nå erstatter r_D i formel (6.13) med $r_D (1 - T_C)$ har man formelen for WACC:

$$WACC = \frac{D}{V} r_D (1 - T_C) + \frac{E}{V} r_E \quad (6.15)$$

¹Hvordan $\beta \implies \alpha$ forstår jeg ikke i det hele tatt, men de håndskrevne notatene fra forelesningen sier det. Setter pris på en epost med forklaring.

Merknad 4. WACC fanger opp skattefordelen ved gjeld (renter). Kontantstrømmen C ved bruk av WACC skal derfor beregnes som om prosjektet kun var egenfinansiert.

Eksempel 8. Gitt et selskap med gjeldsandel 25%, gjeldsrente $r_D = 5\%$, avkastning på egenkapital $r_E = 10\%$ og selskapsskattesats $T_C = 28\%$. Har da at

$$WACC = 0.25 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.28) + 0.75 \cdot 0.10 = 8.4\% \quad (6.16)$$

6.6. Modigliani og Miller - Kapitalstruktur og verdi

M&Ms første proposisjon: Verdien av selskapets aktiva er ikke avhengig av hvordan kontantstrømmen fordeles på ulike investrgrupper når vi ser bort ifra skatt og antar at kapitalmarkedene er perfekte.

M&Ms andre proposisjon: Avkastning på egenkapital øker proporsjonalt med gjeld/egenkapital forholdet:

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{D}{V}r_D + \frac{E}{V}r_E = \frac{D}{E+D}r_D + \frac{E}{E+D}r_E \\ \implies r_E &= r_A + \frac{D}{E}(r_A - r_D) \end{aligned} \quad (6.17)$$

men risikoen øker også tilsvarende:

$$\begin{aligned} \beta_A &= \frac{D}{V}\beta_D + \frac{E}{V}\beta_E \\ \implies \beta_E &= \beta_A + \frac{D}{E}(\beta_A - \beta_D) \end{aligned} \quad (6.18)$$

dermed er ikke verdien av egenkapitalen til et selskap påvirket av giringen.

Del IV.

Symboler og regneregler

7. Nyttige regnerelger

7.1. Nåverdi (rekker)

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{k}{(1+r)^t} = \frac{k}{r} \quad (7.1)$$

$$\sum_{t=1}^N \frac{k}{(1+r)^t} = \frac{k}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^N} \right) \quad (7.2)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{k(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{k}{r-g} \quad (7.3)$$

7.2. Risiko (Varians og kovarians)

$$\text{Var}(ax) = a^2 \text{Var}(x) \quad (7.4)$$

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 2 \cdot \text{Cov}(x, y) \quad (7.5)$$

8. Symboler

Q	Kvantitet (produksjonsmengde).
TC	Totalkostnad.
MC	Marginalkostnad. Noen ganger brukes også C .
AC	Gjennomsnittskostnad.
FC	Faste kostnader (uavhengige av Q).
VC	Variable kostnader (avhengige av Q).
TR	Total revenue.
MR	Marginal revenue (grenseinntekt): inntekt ved å selge 1 ekstra enhet.
P	Pris ($Q(P)$); etterspørsel ($P(Q)$).
ε	Pris-elasticitet.
π	Profitt.
KO	Konsumentoverskudd.
PO	Produsentoverskudd.
SO	Samfunnsøkonomisk overskudd.
Q_M	Produksjonsmengde ved monopol.
Q_{FK}	Produksjonsmengde ved fri konkurranse.
NV	Nåverdi
NNV	Nettonåverdi
C_t	Kontantstrøm i periode t . Merk at C noen ganger brukes for marginalkostnad.
C_o	Initiell kontantstrøm (vanligvis negativ).
r	Rente; forventet avkastning.
$\tilde{r}$	Faktisk avkastning.
r_t	Diskonteringsrente: avkastningskrav i periode t .
r_m	Forventet markedsavkastning.
r_f	Risikofri rente.
r_A	Avkastning på aktiva.
r_D	Gjeldsrente.
E	Egenkapital.
D	Gjeld.
A	Aktiva
V	Verdi
IRR	Internrente.
σ_i	Standardavvik for i ; STD brukes også som symbol.
x_i	Andel av investering gjort i aksje i .
σ_i^2	Varians for i .

σ_{ij}	Kovarians mellom i og j .
ρ_{ij}	Korrelasjonskoeffisienten mellom i og j .
β	Beta.
T_C	Selskapsskattesats.

Register

- aktiva, 21
- Alternativkostnader, 6
- avanse, 9
- avkastningen, 27
- avkastningskrav, 32
- balanse, 21
- Beltrand, 16
- β , 29
- CAPM, 30
- Cournot, 16
- Cournot-duopol, 17
- Dødvektstap, 15
- diversifiseringseffekten, 28
- Driftsregnskap, 21
- elastisk, 8
- etterspørsel, 7
- etterspørselselastisiteten, 8
- faste kostnader, 6
- fri konkurranse, 10
- giring, 22
- gjennomsnittskostnad, 6
- Internrenten, 25
- internt regnskap, 21
- investering, 24
- IRR, 25
- kapitalmarkedslinjen, 30
- korrelasjonskoeffisient, 27
- lønnsomhetsvurdering, 24
- likviditet, 22
- Marginalinntekt, 8
- marginalisering, 11
- Marginalkostnad, 6
- Markedsformer, 10
- markedsporteføljen, 29
- markup, 9
- Modigliani og Miller, 33
- monopol, 11
- Nåverdien, 24
- Nash-likevekt, 16, 17
- Nettonåverdien, 24
- oligopol, 16
- overskudd, 24
- passiva, 21
- Patenter, 15
- PED, 8
- portefølje, 27
- Porteføljevariansen, 27
- Price Elasticity of Demand, 8
- pris, 7
- produksjonsmengde, 6
- produsentoverskudd, 13
- Profitt, 8
- reaksjonsfunksjoner, 17
- relevant kontantstrøm, 25
- rentabilitet, 22
- Resultatregnskap, 21
- risiko, 27
- samfunnsøkonomisk lønnsomhet, 12
- samfunnsøkonomisk overskudd, 14
- selskapsskattesatsen, 32
- Stackelberg, 16

Totalkostnaden, 6

variable kostnader, 6

WACC, 32