Skriftlig Innlevering 3

1

La X være fødselsvekt i gram til et tilfeldig valgt barn i Norge. Anta X er normalfordelt, der $E(X) = 3315$ og $Var(X) = 575^2$.

a) Beregn følgende sannsynligheter,

1) $P(X > 3000)$ 2) $P(3000 < X < 3500)$ 3) $P(X > 3500 \mid X > 3000)$

Dersom fødselsvekten er mindre enn c gram, der

$$P(X < c) = 0.01,$$

vil barnet bli klassifisert som undervektig. La Y være antall av $n = 100$ barn som var undervektige ved fødselen.

b) Under hvilke antagelser er Y binomisk fordelt?
Anta at Y er binomisk fordelt, hva er da $P(Y > 0)$, og $P(Y > 1 | Y > 0)$?

a) Standardiserer

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

1) $P(X>3000) = 1 - P(X<3000)$

$= 1 - 0{,}2912$

$= \underline{\underline{0{,}709}}$

La $Z < \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3000-3315}{575}$

$Z < -0{,}548$

$P(Z < -0{,}548) = 0{,}2912$
tabell

2) $P(3000 < X < 3500) = P(X<3500) - P(X<3000)$

$= 0{,}6255 - 0{,}2912$

$= \underline{\underline{0{,}3343}}$

tilsvarende som for 1,
$P(X<3500) = P(Z<0{,}3217)$
$= 0{,}6255$

3) $P(X>3500 \mid X>3000) = \frac{P(X>3500 \cap X>3000)}{P(X>3000)}$

$= \frac{P(X>3500)}{P(X>3000)}$

$= \frac{1 - P(X<3500)}{1 - P(X<3000)}$

$= \frac{1 - 0{,}6255}{1 - 0{,}2912}$

$= \underline{\underline{0{,}528}}$

b) Det blir en bernoulli forsøksrekke dersom vektene av de nyfødte er uavhengige av hverandre, og dermed er Y binomisk fordelt.

$$P(Y>0) = 1 - P(Y=0) = 1 - \cancel{\binom{100}{0}} 0{,}01^0\, 0{,}99^{100}$$

$$\underline{\underline{P(Y>0) = 0{,}634}}$$

$$P(Y>1 \mid Y>0) = \frac{P(Y>1 \cap Y>0)}{P(Y>0)} = \frac{P(Y>1)}{P(Y>0)} = \frac{1-(P(Y=0)+P(Y=1))}{P(Y>0)}$$

$$= \frac{0{,}634 - P(Y=1)}{0{,}634} = 1 - \frac{\binom{100}{1} 0{,}01^1\, 0{,}99^{99}}{0{,}634}$$

$$= 1 - \frac{0{,}370}{0{,}634}$$

$$\underline{\underline{= 0{,}416}}$$

2

En forhandler kjøper inn et stort parti kulepenner og selger det videre til kunder. Han får klage på alle kulepenner som ikke virker. Anta først at antallet klager, X, er poissonfordelt med parameter $\lambda > 0$:

$$p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Anta, kun i dette punktet, at $\lambda = 7$. Finn sannsynligheten for at forhandleren får en eller flere klager. Finn også sannsynligheten for at forhandleren får færre enn tre klager, gitt at han får en eller flere klager.

a) $$P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{7^0}{0!} e^{-7}$$

$$= 1 - e^{-7}$$

$$\underline{\underline{= 0{,}9991}}$$

$$P(X<3 \mid X>0) = \frac{P(X<3 \cap X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X=1) + P(X=2)}{P(X>0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{7^1}{1} + \frac{7^2}{2}\right) e^{-7}}{1 - e^{-7}}$$

$$\underline{\underline{= 0{,}0288}}$$

b)

Leverandøren av kulepenner har tre fabrikker, benevnt A, B og C, som produserer med ulik kvalitet. Forhandleren mottar varepartiet fra en av fabrikkene men han vet ikke fra hvilken. Dersom varepartiet kommer fra fabrikk A vil antall klager være poissonfordelt med parameter $\lambda_A = 5$, hvis partiet er fra fabrikk B og C er klagefordelingsparameteren henholdsvis $\lambda_B = 15$ og $\lambda_C = 20$. Forhandleren antar i utgangspunktet at det er sannsynlighet $p_A = 0.5$ for at varepartiet kommer fra fabrikk A og sannsynlighet $p_B = p_C = 0.25$ for hver av fabrikkene B og C.

b) Utled et uttrykk for den marginale sannsynlighetsfordelingen for antall klager forhandleren kan regne med å få.

Utled uttrykk for forventet antall klager han mottar når han selger varepartiet med kulepenner. Sett inn verdiene for λ_A, λ_B og λ_C samt for p_A, p_B og p_C, og regn ut tallsvaret.

$$p(x) = \sum_i p(x;\lambda_i)\cdot p(i) \quad , \; i = A,B,C$$

$$= \frac{\lambda_A^x}{x!} e^{-\lambda_A} \cdot p(A) + \frac{\lambda_B^x}{x!} e^{-\lambda_B} \cdot p(B) + \frac{\lambda_C^x}{x!} e^{-\lambda_C} \cdot p(C)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x!}\left(p(A)\lambda_A^x e^{-\lambda_A} + p(B)\lambda_B^x e^{-\lambda_B} + p(C)\lambda_C^x e^{-\lambda_C}\right)}}$$

Forventningsverdien totalt er summen av sannsynlighetene for at pennen kommer fra fabrikk i ganget med forventningsverdien til fabrikken.

$$\underline{\underline{E[X] = \lambda_A P(A) + \lambda_B P(B) + \lambda_C P(C)}}$$

$$= 5\cdot 0{,}5 + 15\cdot 0{,}25 + 20\cdot 0{,}25$$

$$\underline{\underline{= 11{,}25}}$$

$\boxed{3}$

Levetiden til en elektronisk komponent antaes å være eksponentialfordelt. Dersom 10% av komponentene har en forventet levetid på 20 000 timer og 90% av komponentene har en forventet levetid på 50 000 timer, hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig valgt komponent har levetid på mere enn 60 000 timer?

La A være komponentene med forventet levetid på 20 000 timer, og B de med 50 000 timer

For $E[X_A] = 20\,000$, $\lambda_A = \frac{1}{E[X_A]} = 5\cdot 10^{-5}$

$$P(X_A > 60\,000) = 1 - P(X_A \leq 60000) = 1 - F(60000)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-5\cdot 10^{-5}\cdot 60\cdot 10^{3}}\right)$$

$$= e^{-3} = 0{,}0498$$

For $E[X_B] = 50\,000$, $\lambda_B = 2\cdot 10^{-5}$

$$P(X_B > 60\,000) = e^{-6/5} = 0{,}301$$

$$P(X > 60000) = P(A)\cdot P(X_A > 60000) + P(B)\cdot P(X_B > 60\,000) = 0{,}1\cdot e^{-3} + 0{,}9\cdot e^{-6/5}$$

$$\underline{\underline{P(X > 60\,000) = 0{,}276}}$$

4

På italiensk fjernsyn vises det et søndagsshow med Fabrizio Frizzi som programleder, der Frizzi sitter ved siden av en stor safe som inneholder 250 000 000 lire. Safen har en hemmelig firesifret kode. Seerne ringer inn og foreslår koder, og den første som gjetter riktig, får pengene som safen inneholder. Hvert av sifrene i den firesifrede koden er altså et av tallene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ eller 9. Anta foreløpig at ingen av seerne er i stand til å huske koder som er foreslått av tidligere innringere og forkastet, slik at hvert gjett kan betraktes som et tilfeldig forslag av en firesifret kode.

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig innringer gjetter riktig kode?

La X være antall innringinger til (og med) den personen som vinner pengene. Gjør kort rede for hvorfor X er geometrisk fordelt.

Bestem sannsynligheten for at akkurat innringer nummer 300 er den første som gjetter riktig.

a)

$$P(\text{rett kode}) = \frac{\#\text{gunstige}}{\#\text{mulige}} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

- Den kan betraktes som geometrisk fordelt fordi vi har en bernoulli forsøksrekke (uendelig antall uavhengige forsøk, med suksess eller fiasko, og lik sannsynlighet for alle forsøk.) Forsøket kan betraktes som negativt binomisk fordelt, men siden vi ute etter kun ett korrekt gjett, så er den også geometrisk fordelt

$$P(X=300) = f(300) = 10^{-4}\left(1-10^{-4}\right)^{300-1}$$

$$= 9{,}7 \cdot 10^{-5}$$

b)

Anta så at det i begynnelsen av programmet opplyses at sifferet 7 forekommer nøyaktig to ganger i den hemmelige koden (det er i denne formen showet faktisk blir vist) og la m betegne antall koder innringerne nå kan velge blant.

b) Vis at $m = 486$ (dvs. forklar hvordan denne verdien fremkommer).

Dersom vi antar at Frizzi snakker så fort at han rekker å ta i mot to forslag per minutt, hva blir nå forventet tid til noen vinner de 250 000 000 lire?

De 2 7-tallene kan plasseres på $\binom{4}{2} = 6$ måter

De siste 2 tallene kan være 9 ulike siffer, hvilket gir $9 \cdot 9 = 81$ kombinasjoner (per 7'er konfigurasjon)

$$\Rightarrow m = 6 \cdot 81 = 486$$

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{m}} = m = 486$$

$$\Rightarrow \text{Forventet tid} = \frac{486}{2/\text{min}} = 243 \text{ min} = 4 \text{ timer og } 3 \text{ min}$$

c)

Anta så at seerne skriver ned alle koder som blir foreslått slik at ingen innringere foreslår en kode som tidligere er blitt foreslått. La Y betegne antall innringinger til førstemann gjetter riktig kode i dette tilfellet. Anta fremdeles at det opplyses at sifferet 7 opptrer nøyaktig to ganger i koden.

c) Bestem svarene på følgende spørsmål uttrykt som funksjon av m:

Hva er utfallsrommet til Y?

Vis at sannsynlighetsfordelingen til Y er gitt ved $P(Y = y) = \frac{1}{m}$.

Hva blir nå forventet tid til noen vinner de 250 000 000 lire (hvis Frizzi fremdeles rekker å ta i mot to forslag per minutt)?

Utfallsrommet er alle mulige Y, $\Rightarrow Y \in \{1, 2, \dots, 486\}$

Sannsynligheten for rett på forsøk y er litt ved

$$g(y) = \underbrace{\frac{1}{\cancel{(m+1)-y}}}_{\text{Sjanse for rett på dette forsøket}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{\cancel{(m+1)-y}}{\cancel{(m+1)-(y-1)}}}_{\text{Sjanse for at forrige person tippet feil}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{(m+1)-(y-1)}}{\cancel{(m+1)-(y-2)}}}_{\text{personen før forrige}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{\cancel{m-1}}{m}}_{\text{Sjansen for at første person tok feil}}}_{\text{Sjanse for at alle før tok feil}}$$

$$P(\text{tippe feil}) = \frac{\#\text{feil svar igjen}}{\#\text{gjenværende kombinasjoner}} = \frac{(m+1)-y-1}{(m+1)-y} = \frac{(m+1)-(y+1)}{(m+1)-y}$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{m} \quad \square$$

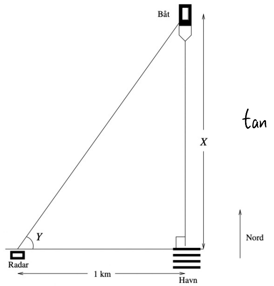
$$E[Y] = \sum_{y=1}^{m} y \cdot g(y) = \sum_{y=1}^{486} y \cdot \frac{1}{486} = \frac{1}{486}\sum_{y=1}^{486} y = \frac{1}{\cancel{486}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{486}(486+1)$$

$$= \frac{487}{2} = 243{,}5 \text{ forsøk.}$$

$$\text{Forventet tid} = \frac{243{,}5}{2\,\text{forsøk/min}} = 121{,}75 \text{ min} = 121 \text{ min og } 45 \text{ sek}$$

$\boxed{5}$

En havneby observerer ankommende skip ved å bruke radar. Vi antar for enkelhets skyld at skipene alltid ankommer fra nord. Radaren er plassert 1 kilometer vest for havna. Det er ønskelig å oppdage ankommende skip så tidlig som mulig av praktiske og sikkerhetsmessige årsaker. Når skipet første gang fanges inn på radaren, observerer radaren vinkelen $Y \in [0, \pi/2)$,



Figur 1: Illustrasjon til oppgave 5.

$\tan Y = \frac{X}{1\,\text{km}} = X$ [enhetsløs]

som vist i Figur 1. Radaren observerer kun vinkelen Y, og ikke avstanden til skipet. Vinkelen Y varierer fra skip til skip av mange årsaker.

La den kumulative fordelingsfunksjonen til Y være

$$F(y;\beta) = P(Y \leq y) = \frac{1-\exp\{-y/\beta\}}{1-\exp\{-\pi/(2\beta)\}}, \quad y \in [0, \pi/2),$$

der $\beta > 0$ er en parameter.

a) Anta bare i dette punktet at $\beta = \pi/8$.

Regn ut $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)$ og $\mathrm{P}\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right)$.

a)

$$P\left(Y > \frac{\pi}{4}\right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1-\exp\left(-\frac{\pi/4}{\pi/8}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{8}}\right)}$$

$$= \underline{\underline{0{,}1192}}$$

$$P\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right) = P\left(Y < \frac{\pi}{3}\right) - P\left(Y < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1-\exp\left(-\frac{\pi/3}{\pi/8}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{8}}\right)} - \frac{1-\exp\left(-\frac{\pi/4}{\pi/8}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{8}}\right)}$$

$$= 0{,}9479 - 0{,}8808$$

$$= \underline{\underline{0{,}0671}}$$

$$P\left(Y > \frac{\pi}{4} \mid Y < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{P\left(Y > \frac{\pi}{4} \cap Y < \frac{\pi}{3}\right)}{P\left(Y < \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right)}{P\left(Y < \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{0{,}0671}{0{,}9479} = \underline{\underline{0{,}0708}}$$

b) Vis at sannsynlighetstettheten $f(y;\beta)$ til Y er

$$f(y;\beta) = \frac{1}{\beta - \beta\exp\{-\pi/(2\beta)\}}\exp\{-y/\beta\}, \quad y \in [0, \pi/2).$$

Havnebyen er mer interessert i avstanden til havna når skipet først oppdages enn vinkelen Y som radaren observerer. La X betegne denne avstanden, som vist i Figur 1.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til X.

Det oppgis at $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ og $\frac{d}{dx}(\arc\tan(x)) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$f(y;\beta) = \frac{d}{dy}F(y;\beta) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1-\exp(-y/\beta)}{1-\exp(-\pi/2\beta)}\right) = \underbrace{\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-\exp(-\pi/2\beta)}\right)}_{=0} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\exp(-y/\beta)}{1-\exp(-\pi/2\beta)}\right)$$

$$= +\left(+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{\exp(-y/\beta)}{1-\exp(-\pi/2\beta)}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\exp(-y/\beta)}{\beta - \beta\exp\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)}}} \quad \square$$

Fra figuren, $\tan Y = X \Rightarrow Y = \arctan X$

Variabelskifte i $F(y;\beta)$ gir: $F(x;\beta) = \frac{1-\exp\left(-\frac{\arctan x}{\beta}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)}$

gitt i oppgaven

$$f(x;\beta) = \frac{d}{dx}F(x;\beta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\exp\left(-\frac{\arctan x}{\beta}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)}\right) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{\arctan x}{\beta}\right)\cdot\frac{\exp\left(-\frac{\arctan x}{\beta}\right)}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{\arctan x}{\beta}\right)}{\beta-\beta\exp\left(-\frac{\pi}{2\beta}\right)}}}$$

konstant $\Rightarrow = 0$

$x > 0$