Skriftlig Innlevering 2

1

Simultanfordelingen, $f(x,y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=-1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$x=0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$x=1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y, og beregn forventning og varians til X og til Y.

Beregn kovariansen mellom X og Y, $\text{Cov}(X,Y)$. Er X og Y uavhengige? Svaret skal begrunnes.

$g(x)$:

$$\left.\begin{aligned} g(-1) &= \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{3} \\ g(0) &= \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{3} \\ g(1) &= \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

x	-1	0	1
$g(x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$E[X] = \sum_x x\,g(x) = -\tfrac{1}{3}+0+\tfrac{1}{3} = 0 = \mu_x$$

$$Var[X] = \sum_x (x-\mu_x)^2 g(x) = (-1)^2\tfrac{1}{3}+0+\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} = \sigma_x^2$$

$h(y)$:

$$\left.\begin{aligned} h(-1) &= \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{3} \\ h(0) &= \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{3} \\ h(1) &= \tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

y	0	1	2
$h(y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$E[Y] = \sum_y y\,g(y) = 0\cdot\tfrac{1}{3}+1\cdot\tfrac{1}{3}+2\cdot\tfrac{1}{3} = 1 = \mu_y$$

$$Var[Y] = \sum_y (y-\mu_y)^2 g(y) = (0-1)^2\tfrac{1}{3}+(1-1)^2\tfrac{1}{3}+(2-1)^2\tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} = \sigma_y^2$$

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = \sum_x 0 + x f(x,1) + 2x f(x,2)$$

$$= \left(-1\cdot\tfrac{1}{12}+0+1\cdot\tfrac{1}{12}\right)+2\left(-1\cdot\tfrac{1}{12}+0+1\cdot\tfrac{1}{6}\right)$$

$$E[XY] = \tfrac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y) = E[XY]-E[X]\cdot E[Y] = \tfrac{1}{6}-0\cdot 1 = \tfrac{1}{6}$$

$\underline{\underline{E[X]=0,\ Var[X]=\tfrac{2}{3},\ E[Y]=1,\ Var[Y]=\tfrac{2}{3},\ Cov[XY]=\tfrac{1}{6}.\ Cov[XY]\neq 0 \Rightarrow X \text{ og } Y \text{ er ikke uavhengige.}}}$

2

En person kaster en terning og holder på til han første gang får et resultat han har fått før. La X betegne antall kast og finn fordelingen til X.

Ved "prøv og feil", $P(X=x) = \underbrace{\frac{x-1}{6}}_{\text{Sjanse for å kaste noe han har fått før}} \cdot \underbrace{\frac{6!}{6^{x-1}(6-(x-1))!}}_{\text{Sjanse for at tidligere kast ikke er noe han har fått før}} = \frac{(x-1)6!}{6^x(7-x)!}$, $x = 1, \dots, 7$

$$P(X=1) = \frac{0 \cdot 6!}{6 \cdot 6!} = \frac{0}{6} = 0$$
$$P(X=2) = \frac{1 \cdot 6!}{6^2 \cdot 5!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$$
$$P(X=3) = \frac{2 \cdot 6!}{6^3 \cdot 4!} = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$
$$P(X=4) = \frac{3 \cdot 6!}{6^4 \cdot 3!} = \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{18}$$
$$P(X=5) = \frac{4 \cdot 6!}{6^5 \cdot 2!} = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{27}$$
$$P(X=6) = \frac{5 \cdot 6!}{6^6 \cdot 1!} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{25}{324}$$
$$P(X=7) = \frac{6 \cdot 6!}{6^7 \cdot 0!} = \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{324}$$
$$P(X>7) = 0$$

X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	0	1/6	5/18	5/18	5/27	25/324	5/324

3

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{dersom } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn fordelingsfunksjonen $F(x)$ til X. Finn sannsynligheten for at X ligger mellom $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ når $n = 1$ og når $n = 2$. Finn medianen til X, dvs. den verdi av a som er slik at $P(X \leq a) = \frac{1}{2}$, når $n = 1$ og når $n = 2$. Finn forventningsverdien til X når $n = 1$ og når $n = 2$ og sammenlign med de korresponderende medianer.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x nx^{n-1}\,dx = x^n$$
$$\underline{\underline{F(x) = x^n}}$$

• n=1:

$$P(1/4 < x < 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} x^0\,dx = x\Big|_{1/4}^{3/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$
$$F(a) = a = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$
$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$
$$\underline{\underline{\mu = \frac{1}{2}}}$$

Medianen og forventningsverdien er like.

• n=2:

$$P(1/4 < x < 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} 2x\,dx = x^2\Big|_{1/4}^{3/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$
$$F(a) = a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$
$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$
$$\underline{\underline{\mu = \frac{2}{3}}}$$

Medianen er større enn forventningsverdien.

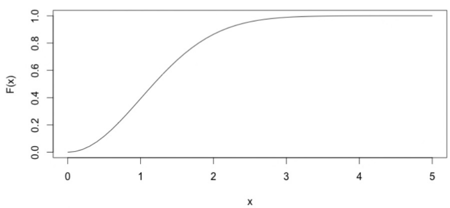
4

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X, til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\} \quad ; \quad x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.



Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

a) Bestem sannsynlighetstettheten til X.

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

- $f(x) = F'(x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)\right)' = 0 + \frac{x}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) = \underline{\underline{\frac{x}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)}}$

- Maksimum: $f'(x) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) - \frac{x^{\cancel{2}}}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) = 0$

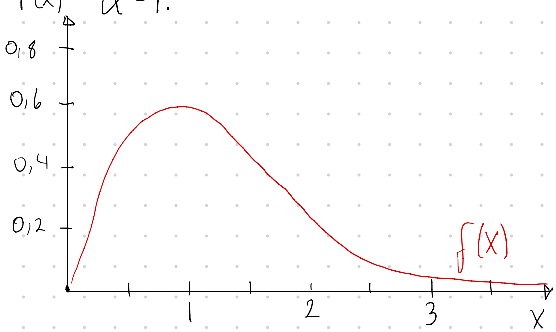
$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\underbrace{\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)}_{>0} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 0$$

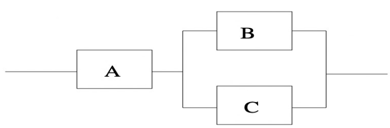
$$\frac{x^2}{\alpha^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\cancel{\alpha}}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\alpha}}}$$

$f(x)$ $\alpha = 1$:



Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α. Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.

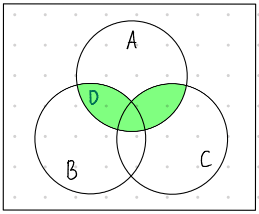


La følgende fire hendelser være definert:

A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.
B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.
C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.
D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.
Skraver hendelsen D i Venn-diagrammet.
For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Hendelse $D = A \cap (B \cup C)$



Har $P(A') = P(B') = P(C') = F(2) = 1 - \exp\left(-\frac{2^2}{2\cdot 1}\right) \approx 0{,}865$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1 - F(2) = 0{,}135$

Fra venndiagrammet: $P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

Komponentene svikter uavhengig av hverandre

$\Rightarrow P(D) = 0{,}135^2 + 0{,}135^2 - 0{,}135^3$

$\underline{\underline{P(D) = 0{,}034}}$

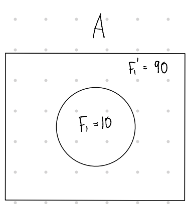
5

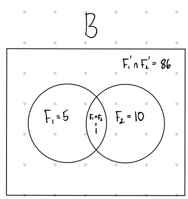
En kjøpmann mottar to varepartier med fiskeboller fra samme produsent men fra to forskjellige fabrikker. Boksene kan altså ikke skilles fra hverandre utenpå. Varepartiene betegnes A og B, og de har følgende karakteristikker:

Vareparti A**:** 100 bokser, hvorav 10 med moste boller (betegnet $F1$).
Vareparti B**:** 100 bokser, hvorav 5 med moste boller (betegnet $F1$) og 10 med vond lukt og smak (betegnet $F2$), hvorav 1 boks har både $F1$ og $F2$.

Merk at feilene "moste boller"og "vond lukt og smak"ikke kan observeres utenpå, men krever ødeleggende testing for å avsløres.

a) Tegn Venndiagram for hver av varepartiene A og B, med angivelse av antall for alle hendelser. Hvis kjøpmannen hadde trukket en boks tilfeldig fra vareparti B, hva er sannsynligheten for å få en med feil $F1$? Hvis han hadde trukket to bokser tilfeldig fra vareparti B, hva er sannsynligheten for å trekke en med bare feil $F1$ og en med bare feil $F2$?





$\underline{\underline{P(F_1 | B) = \frac{5}{100} = 0{,}05}}$

La C = Trekke en med kun F_1 og en med kun F_2 fra B

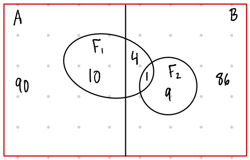
$$P(C) = \frac{\binom{5-1}{1}\binom{10-1}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{9}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{\frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{9!}{1!\cdot 8!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}} = \frac{4\cdot 9}{\frac{100\cdot 99}{2}} = \frac{2}{275}$$

$\underline{\underline{P(C) = \frac{2}{275} = 0{,}00727}}$

Varepartiene ble lagt på et lager og etter en tid glemte kjøpmannen hvilket som var vareparti A og hvilket som var vareparti B selv om de ligger i to separate stabler. Kjøpmannen trekker tilfeldig tre bokser fra en av stablene og merker seg hvilken det var. Han anser det som helt tilfeldig om det er vareparti A eller B. Etter å ha åpnet de tre boksene observerer han at to var feilfrie og en hadde bare feil $F1$.

b) Tegn et Venndiagram for prøvetakingssituasjonen, med angivelse av antall. Hva er sannsynligheten for å observere to feilfrie og en med bare feil $F1$? Hva er sannsynligheten for at kjøpmannen trakk boksene fra vareparti A?

Har nå $A \cap B$:



La D: To feilfrie og én med kun F_1

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$$

$$P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot \frac{90 \cdot 89}{2}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \frac{86 \cdot 85}{2}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2}}$$

$$\underline{\underline{P(D) = \frac{71}{420} = 0{,}169}}$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\cancel{\binom{100}{3}}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\cancel{\binom{100}{3}}} + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\cancel{\binom{100}{3}}}} = \frac{10 \cdot \frac{90 \cdot 89}{\cancel{2}}}{10 \cdot \frac{90 \cdot 89}{\cancel{2}} + 4 \cdot \frac{86 \cdot 85}{\cancel{2}}} = \frac{10 \cdot 90 \cdot 89}{10 \cdot 90 \cdot 89 + 4 \cdot 86 \cdot 85}$$

$$\underline{\underline{P(A|D) = \frac{4005}{5467} = 0{,}7326}}$$

Kjøpmannen ønsker deretter å selge fiskebollboksene for kr. 10,- pr. stk., men er bekymret for kundenes reaksjon på boksene med feil. Han er overbevist om at alle boksene blir solgt og at feilene vil oppdages og reklameres. Han bestemmer seg for følgende:

- mosete boller, bare feil $F1$, kjøpesummen på kr. 10,- gis tilbake til kunden.
- vond lukt og smak, feil $F2$ eller feil $F1$ og $F2$, kjøpesummen på kr. 10,- pluss kr. 150,- for tort og svie gis tilbake til kunden.

c) Kjøpmannen kan, etter at de tre boksene er observert og ødelagt velge mellom følgende:

1) selge alle de resterende boksene
2) selge de resterende boksene i den stabelen de tre observerte boksene kom fra
3) selge boksene i den andre stabelen
4) ikke selge noen bokser

Hvor stor er den forventede inntekt i hvert tilfelle? Hva er den beste beslutningen hvis kjøpmannen ønsker å maksimere sin forventede inntekt?

Har nå 197 bokser, 13 med F_1, 9 med F_2 og 1 med både F_1 og F_2.

1) Inntekt $= 197 \cdot 10 - 13 \cdot 10 - 10 \cdot 160 = \underline{\underline{240 \text{ kr}}}$

2) Forventet inntekt $=$ Inntekt $A \cdot P(A|D) +$ Inntekt $B \cdot (1 - P(A|D))$

$= (97 \cdot 10 - 9 \cdot 10) \cdot 0{,}7326 + (97 \cdot 10 - 3 \cdot 10 - 10 \cdot 160) \cdot 0{,}2674$

$= \underline{\underline{468 \text{ kr}}}$

3) Får tilsvarende som for 2), men sannsynlighetene "flippes" og komposisjonen er som før testing for den man trekker fra

Forventet inntekt $=$ Inntekt $A \cdot P(A'|D) +$ Inntekt $B \cdot (1 - P(A'|D))$

$= (100 \cdot 10 - 10 \cdot 10)\, 0{,}2674 + (100 \cdot 10 - 4 \cdot 10 - 10 \cdot 160)\, 0{,}7326$

$= \underline{\underline{-228 \text{ kr}}}$

4) $\underline{\underline{\text{Inntekt} = 0 \text{ kr}}}$

<u>Kjøpmannen bør selge der resterende boksene i den pallen har testet.</u>