Skriftlig innlevering 1

Oppgave 1

I ett lotteri er det 100 lodd. Ett av loddene gir gevinst **A**, ett av loddene gir gevinst **B**, og de 98 andre loddene gir ingen gevinst. Per kjøper 4 lodd som han trekker tilfeldig uten tilbakelegging.

Hva er sannsynligheten for at han vinner gevinst **A**?

Per forteller at han vant gevinst **A**. Hva er sannsynligheten for at han også vant gevinst **B**?

Per forteller at han vant minst en gevinst. Hva er sannsynligheten for at han vant både gevinst **A** og **B**?

\# mulige måter å trekke lodd: $\binom{100}{4}$

\# mulige måter å trekke lodd, og vinne gevinst A: $\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{må vinne}}\underbrace{\binom{99}{3}}_{\text{ulike måter å trekke resten av loddene}}$

- $$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{99}{3}}{\binom{100}{4}} = \frac{\frac{1!}{1!}\cdot\frac{99!}{3!\,\cancel{96!}}}{\frac{100!}{4!\,\cancel{96!}}} = \frac{4}{100}$$

$$\underline{\underline{P(A) = \frac{4}{100}}}$$

\# mulige måter å trekke A og B: $\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{98}{2}$

- $$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{98}{2}}{\binom{100}{4}}}{\frac{4}{100}} = \frac{1}{33}$$

$$\underline{\underline{P(B|A) = \frac{1}{33}}}$$

\# mulige måter å vinne minst én: kun A + kun B + begge $= 2\cdot\binom{1}{1}\binom{99}{3} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{98}{2}$

- $$P(A\cap B\,|\,\text{minst én}) = \frac{P((A\cap B)\cap \text{minst én})}{P(\text{minst én})} = \frac{P(A\cap B)}{P(\text{minst én})} = \frac{\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{98}{2}}{\cancel{\binom{100}{4}}}}{\frac{2\cdot\binom{1}{1}\binom{99}{3}+\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{98}{2}}{\cancel{\binom{100}{4}}}} = \frac{1}{65}$$

$$\underline{\underline{P(A\cap B\,|\,\text{minst én}) = \frac{1}{65}}}$$

Oppgave 2

La A og B være to hendelser i et utfallsrom S, der $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ og $P(A\cup B) = 0.6$.

Er hendelsene A og B disjunkte? Er hendelsene A og B uavhengige?

Disjunkte: $P(A\cap B) = 0$

Uavhengige: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}2\cdot 0{,}5 = 0{,}1$

Ved Addisjonssetningen:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}1$$

$\Rightarrow$ <u>A og B er uavhengige, men ikke disjunkte</u>

Oppgave 3

Nokre moglege hendingar ved bygningane til NTNU ved årsskiftet 1999/2000 er følgjande:

E=Tap av elektrisitetsforsyning
V=Tap av forsyning av vatn
F=Tap av fjernvarme

Ei ekspertgruppe har kome fram til følgjande sannsyn for hendingane E og F: $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.05$ og $P(E \cap F) = 0.02$.

a) Romtemperaturen i bygningane vil gå ned ved tap av elektrisitetsforsyning eller tap av fjernvarme. Uttrykk denne hendinga, R, ved hjelp av E og F. Kva blir sannsynet for R. Er hendingane E og F uavhengige? Er dei disjunkte? Grunngje svara.

b) Gitt at ingen av hendingane E og F skjer, er sannsynet for V lik 0.07. Gitt at minst ei av hendingane E og F skulle skje, er sannsynet for V lik 0.50. Finn sannsynet for hendinga V.

Eventuelle iverksette laboratorieforsøk blir brotne av dersom minst ei av hendingane E, V og F skjer. Kva er sannsynet for at dette skjer?

a) $P(R) = P(E \cup F) \underset{\uparrow}{=} P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0{,}08$

addisjonssetningen

$\underline{\underline{P(R) = 0{,}08}}$

Disjunkte: $P(E \cap F) = 0$, $P(E \cap F) = 0{,}02 \neq 0$

Uavhengige: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$, $P(E) \cdot P(F) = 0{,}025 \neq 0{,}02 = P(E \cap F)$

$\Rightarrow$ <u>E og F er verken disjunkte eller uavhengige</u>

b) $P(V \mid (E \cup F)') = 0{,}07$

$P(V \mid (E \cup F)) = 0{,}50$

$P(V) = P(V \cap (E \cup F)') + P(V \cap (E \cup F))$

$$P(V \mid (E \cup F)') = \frac{P(V \cap (E \cup F)')}{P((E \cup F)')}$$

$\Rightarrow P(V \cap (E \cup F)') = P(V \mid (E \cup F)') \cdot P((E \cup F)') = 0{,}07 \cdot (1 - 0{,}08)$

$\underline{P(V \cap (E \cup F)') = 0{,}0644}$

Tilsvarende: $\underline{P(V \cap (E \cup F)) = 0{,}50 \cdot 0{,}08 = 0{,}04}$

$\Rightarrow P(V) = 0{,}0644 + 0{,}04 = 0{,}1044$

$\underline{\underline{P(V) = 0{,}104}}$

$P(V \cup E \cup F) = P(V \cup (E \cup F)) = P(V \cup R) = P(V) + P(R) - \underbrace{P(V \cap R)}_{= P(V \cap (E \cup F))}$

$= 0{,}104 + 0{,}08 - 0{,}04$

$\underline{\underline{P(V \cup E \cup F) = 0{,}144}}$

Oppgave 4

I en befolkning av like mange menn og kvinner er 5% av mennene og 0.25% av kvinnene fargeblinde. En tilfeldig utvalgt person viser seg å være fargeblind. Hva er sannsynligheten for at vedkommende person er en mann?

M : Mann

K : Kvinne

F : Fargeblind

Gitt

$P(F|M) = 0{,}05$

$P(F|K) = 0{,}0025$

$P(M) = 0{,}5$

$P(K) = 0{,}5$

$$P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F|M) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}025$$

$$P(K \cap F) = P(K) \cdot P(F|K) = 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}00125$$

$$P(F) = P(K \cap F) + P(M \cap F) = 0{,}02625$$

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F|M)}{P(F)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = 0{,}952$$

$$\underline{\underline{P(M|F) = 0{,}95}}$$

Oppgave 5

Vis ved hjelp av venndiagram at

$$\left.\begin{aligned}(A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'\end{aligned}\right\} \text{de Morgans lov(er)}$$

og at

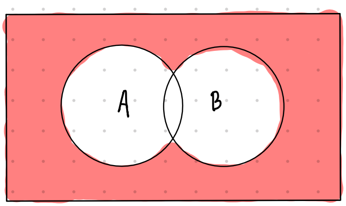
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

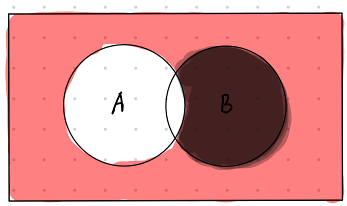
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

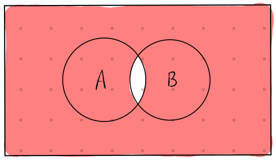
Områdene i rødt er "svarene"



=

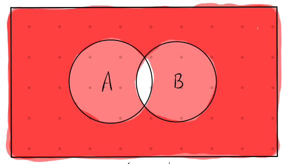


$(A \cup B)'$ $\qquad$ $A' \cap B'$

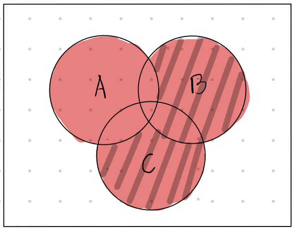


$(A \cap B)'$

=

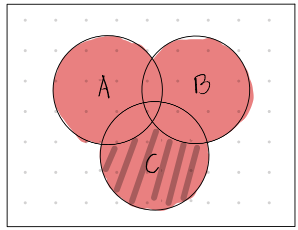


$A' \cup B'$

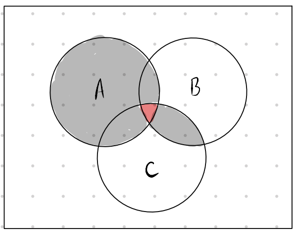


$A \cup (B \cup C)$

=

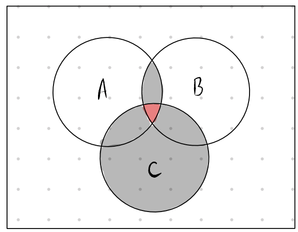


$(A \cup B) \cup C$

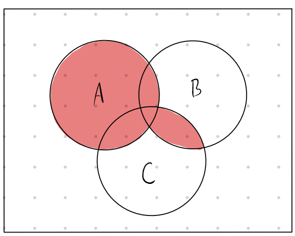


$A \cap (B \cap C)$

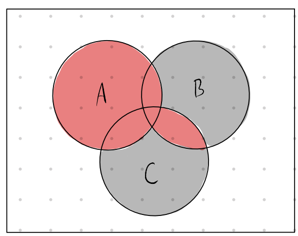
=



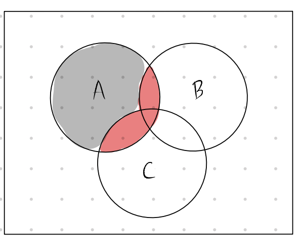
$(A \cap B) \cap C$



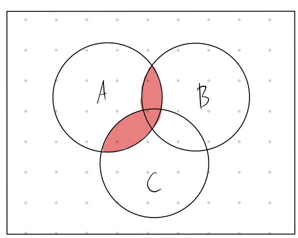
$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Oppgave 6

Det har kommet en effektiv behandling for en dødelig sykdom der en tidligere ikke hadde noen behandling. Det planlegges en masseundersøkelse av alle voksne nordmenn, dvs. 3 mill. individer. En vet at sannsynligheten for at en voksen nordmann har denne sykdommen er 0.003. En ønsker altså å identifisere de individer som har sykdommen med en laboratoriumsprøve.

En vet at for en person med denne sykdommen så vil prøven slå ut med sannsynlighet 0.99. På den andre side så vil prøven slå ut feilaktig på personer uten sykdommen med sannsynlighet 0.005.

Hendelsen at en person har sykdommen benevnes D og hendelsen at prøven slår ut benevnes A.

a) Hvor mange voksne nordmenn ville en forvente har sykdommen?

Hvor mange av disse vil en forvente ikke blir avslørt av prøven?

Benytt Bayes regel og utled svarene i den notasjon som er gitt over før tallsvar regnes ut:

b) Hva er sannsynligheten for at en person som prøven har slått ut for, ikke har sykdommen?

Hva er sannsynligheten for at en person som prøven ikke har slått ut for, har sykdommen?

Gi en kort kommentar til svarene.

a) $n = 3\,000\,000 \cdot 0{,}003 = 9000$

Forventet antall syke nordmenn $= 9000$

Forventet antall uoppdagede syke nordmenn $= 9000 \cdot 0{,}01 = 90$

Gitt

$P(D) = 0{,}003$

$P(A|D) = 0{,}99$

$P(A|D') = 0{,}005$

b) Ønsker å finne: $P(D'|A)$ og $P(D|A')$

$$P(D'|A) = \frac{P(A|D')P(D')}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D') \cdot P(D')$$

$$P(D'|A) = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}997}{0{,}99 \cdot 0{,}003 + 0{,}005 \cdot 0{,}997}$$

$$P(D'|A) = 0{,}6266$$

$$P(D|A') = \frac{P(A'|D)P(D)}{P(A')}$$

$$P(A') = P(A'|D)P(D) + P(A'|D')P(D')$$

$$P(D|A') = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}003}{0{,}01 \cdot 0{,}003 + 0{,}995 \cdot 0{,}997}$$

$$P(D|A') = 3{,}024 \cdot 10^{-5}$$