Spørsmål 1

La $X_1, \ldots, X_8$ være et tilfeldig utvalg fra en binomisk fordeling med $n = 9$. Det vil si at hver X_i tar en verdi i $\{0, 1, \ldots, 9\}$, $i = 1, \ldots, 8$. Vi ønsker å estimere sannsynligheten p i denne binomiske fordelingen. To estimatorer er blitt foreslått

$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{9}$ og $\hat{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{9 \cdot 8}$

Dersom den sanne verdien til p er 0.3, hva er variansen til den estimatoren vi vil foretrekke? (Husk: vi ønsker en estimator som er forventningsrett og har så lav varians som mulig). Oppgi svaret som et desimaltall med fire desimaler, for eksempel 0.0204 og 1.3400.

$$E[\hat{p}_1] = E\left[\frac{X_1}{9}\right] = \frac{1}{9} E[X_1] \underset{\substack{\text{binomisk} \\ \text{fordeling}}}{=} \frac{1}{9} \underset{9}{n} \cdot p = p = 0{,}3$$

$$E[\hat{p}_2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{9 \cdot 8}\right] \underset{\substack{\text{lineær} \\ \text{funksjon}}}{=} \frac{1}{9 \cdot 8} \sum_{i=1}^{8} E[X_i] = \frac{1}{9 \cdot 8} \sum_{i=1}^{8} \underset{\overset{\shortparallel}{9}}{n_i} p = \frac{1}{9 \cdot 8} (8 \cdot 9) \cdot p = p = 0{,}3$$

Begge er forventningsrette $\Rightarrow$ Ønsker lavest mulig varians

Spesialtilfelle

Dersom $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige stokastiske variabler har vi at $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0$ for $i \neq j$, se regneregel for kovarians mellom uavhengige stokastiske variabler, slik at resultatet i teoremet forenkler seg til

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i].$$

La X og Y være to stokastiske variabler og la a være en konstant. Da har vi at

- $\mathrm{Var}[a] = 0,$
- $\mathrm{Var}[aX] = a^2 \mathrm{Var}[X],$
- $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + \underset{\text{uavhengige}}{\cancel{2\mathrm{Cov}[X, Y]}^{\,0}}.$

$$\mathrm{Var}[\hat{p}_1] = \mathrm{Var}\left[\frac{X_1}{9}\right] = \left(\frac{1}{9}\right)^2 \mathrm{Var}[X_1] \underset{\substack{\text{Binomisk} \\ \text{fordeling}}}{=} \frac{1}{9^2} np(1-p) = \frac{1}{45} 9 \cdot 0{,}3(1-0{,}3) = 0{,}0420$$

$$\mathrm{Var}[\hat{p}_2] = \mathrm{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{9 \cdot 8}\right] = \frac{1}{72^2} \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{8} X_i\right] \underset{\text{uavhengige}}{=} \frac{1}{72^2} \sum_{i=1}^{8} \mathrm{Var}[X_i] = \frac{1}{72^2} \cdot \underset{\text{sum} \Rightarrow 8 \text{ ganger}}{8} \cdot np(1-p) = \frac{8}{72^2} 9 \cdot 0{,}3(1-0{,}3) = 0{,}0029$$

$$\mathrm{Var}[\hat{p}_2] < \mathrm{Var}[\hat{p}_1] \Rightarrow \text{Svar} = \underline{\underline{0{,}0029}}$$

Spørsmål 2

Du vil undersøke forekomsten av kobolt i et område og velger tilfeldig ut 14 steder der du tar like store jordprøver. La X_i betegne koboltinnholdet i mg i prøve nr. $i = 1, 2, \ldots, 14$. Du antar videre at X_i ene er uavhengige og eksponentialfordelt med forventningsverdi β, som du ønsker å estimere. En venn foreslår følgende estimator for β:

$$\hat{\beta} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{14} X_i}{14}$$

Hva er estimatorens forventningsverdi og varians dersom vi antar at den sanne verdien av β er 7? Oppgi svarene som desimaltall med to desimaler, for eksempel 10.45 og 4.09.

$$E[\hat{\beta}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{14} X_i}{14}\right] = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} E[X_i] = \frac{1}{14} \cdot 14 \cdot \beta = \beta = \underline{\underline{7{,}00}}$$

$$Var[\hat{\beta}] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{14} X_i}{14}\right] = \frac{1}{14^2} \sum_{i=1}^{14} Var[X_i] = \frac{1}{14^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{14} \cdot \beta^2 = \frac{7^2}{14} = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3{,}50}}$$

Spørsmål 3

La $Y_1, \ldots, Y_{14}$ være uavhengige og identisk fordelte variable fra en uniformfordeling på intervallet $(0, \theta]$, der θ er en ukjent parameter vi ønsker å estimere. To estimatorer for θ er blitt foreslått:

$\hat{\theta}_1 = \max\{Y_1, \ldots, Y_{14}\}$ og $\hat{\theta}_2 = 2\bar{Y} = \frac{2}{14} \sum_{i=1}^{14} Y_i$.

Forventningsverdien til $\hat{\theta}_1$ og $\hat{\theta}_2$ kan uttrykkes henholdsvis $E[\hat{\theta}_1] = k_1\theta$ og $E[\hat{\theta}_2] = k_2\theta$.

(a) Hva er verdien til k_1? Hint: Her må du først finne sannsynlighetstettheten til $\hat{\theta}_1$. Oppgi svaret som en brøk, for eksempel 2/3 eller 3/5.

Uniformfordeling: $$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta - 0} = \frac{1}{\theta}, & y \in \langle 0, \theta] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y}{\theta} & 0 < y \leq \theta \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$F_{\hat{\theta}_1}(y) = P(Y_{(14)} \leq y) = P(\max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{14}\} \leq y) = F_{Y_1}(y) F_{Y_2}(y) \cdots F_{Y_{14}}(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^{14}, \quad 0 < y \leq \theta$$

Fra "ekstremvariabler"

uniform fordeling

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}_1}(y) = 14 \frac{y^{13}}{\theta^{14}}, \quad 0 < y \leq \theta$$

$$E[\hat{\theta}_1] = 14 \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{y^{13}}{\theta^{14}} dy = 14 \int_0^{\theta} \frac{y^{14}}{\theta^{14}} dy = \frac{14}{15} \left[\frac{y^{15}}{\theta^{14}}\right]_0^{\theta} = \frac{14}{15}\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k_1 = \frac{14}{15}}}$$

(b)Hva er verdien til k_2? Oppgi svaret med tre desimaler, f.eks. 0.569.

$$E[\hat{\theta}_2] = \frac{2}{14} \sum_{i=1}^{14} E[Y_i] = \frac{2}{14} \cdot 14 \cdot \frac{0+\theta}{2} = \theta \Rightarrow \underline{\underline{k_2 = 1}}$$

Uniformfordeling

(c) Hva er variansen til den av estimatorene som er forventningsrett? Oppgi svaret som en funksjon av θ. Symbolet for θ kan skrives "theta" (uten hermetegn) i svarfeltet.

$\hat{\theta}_2$ er forventningsrett

$$\mathrm{Var}[\hat{\theta}_2] = \mathrm{Var}\left[\frac{2}{14} \sum_{i=1}^{14} Y_i\right] = \left(\frac{2}{14}\right)^2 \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{14} Y_i\right] = \left(\frac{2}{14}\right)^2 \sum_{i=1}^{14} \mathrm{Var}[Y_i]$$

$$= \frac{4}{14} \frac{\theta^2}{12} = \underline{\underline{\frac{\theta^2}{42}}}$$

Uniform fordeling $\Rightarrow \mathrm{Var}[Y] = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$

Spørsmål 4

La $X_1, \ldots, X_{31}$ være uavhengige Poissonfordelte stokastiske variabler med forventningsverdi 2. Fra sentralgrenseteoremet vet vi at $\bar{X} = \frac{1}{31} \sum_{i=1}^{31} X_i$ vil være tilnærmet normalfordelt. Hva er forventningsverdien og standardavviket i denne normalfordelingen? Oppgi svarene som desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.532 og 10.500.

For poissonfordelte variabler: $E[X_i] = Var[X_i] = \lambda t = \mu$

Her: $\mu = 2$

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{31} \sum_{i=1}^{31} X_i\right] = \frac{1}{31} \sum_{i=1}^{31} E[X_i] = \frac{1}{31} \cdot 31 \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$$

$$Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{1}{31} \sum_{i=1}^{31} X_i\right] = \frac{1}{31^2} \sum_{i=1}^{31} E[X_i] = \frac{1}{31^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{31} \cdot 2 = \frac{2}{31}$$

$$\sigma[\bar{X}] = \sqrt{Var[\bar{X}]} = \sqrt{\frac{2}{31}} = \underline{\underline{0{,}254}}$$

Spørsmål 5

Jo spiller ofte basketball på fritiden. Hver tirsdag øver han seg på straffekast. Jo har funnet ut at han scorer i 60 prosent av straffekastene, og at kastene kan antas uavhengige.

(a) Neste tirsdag planlegger Jo å utføre 14 straffekast. Hva er sannsynligheten for at Jo scorer i mer enn 7 av kastene? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, f.eks. 0.125 og 0.053.

Dette tilsvarer en binomisk fordeling med $p = 0{,}6$

$n = 14$, $x > 8$

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0{,}308 = \underline{\underline{0{,}692}}$$

fra tabell

(b) I løpet av de neste fire ukene planlegger Jo å utføre til sammen 40 straffekast. For enkelhets skyld antar vi at til tross for all treningen vil ikke Jo bli noe bedre i straffekast, så sannsynligheten for at Jo scorer i et kast vil hele tiden være lik 60 prosent. Bruk sentralgrenseteoremet til å finne (tilnærmet) sannsynligheten for at Jo scorer i mer enn 20 av de 40 kastene. Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, f.eks. 0.125 og 0.053.

$p = 0{,}6$, $n = 40$, $x > 20$, $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - 0{,}130 = 0{,}870$

kalkulator på nett

Spesialtilfelle av sentralgrenseteoremet for binomisk fordeling

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{20 - 24}{\sqrt{9{,}6}} = -1{,}29$$

$np = 40 \cdot 0{,}6 = 24$

$np(1-p) = 24 - 24 \cdot 0{,}6 = 9{,}6$

Tilnærming:

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - P(Z \leq -1{,}29) = 1 - 0{,}0985$$

$$= 0{,}9015 \approx \underline{\underline{0{,}902}}$$

Tabell Normalfordeling

Spørsmål 6

Audun er glad i pizza og ringer hver dag til Petters Pizza for å bestille seg middag. Det er imidlertid en viss sannsynlighet for at ingen tar telefonen når han ringer, slik at Audun må legge på og prøve på nytt litt senere.

Anta at hvert forsøk er uavhengig og at sannsynligheten for at Audun når gjennom på telefon til Petters Pizza er 0.2 uavhengig av hvilken dag han ringer på. Du kan også anta at Petters Pizza holder åpent hver dag.

Hva er (den tilnærmede) sannsynligheten for at Audun i løpet av 28 dager i gjennomsnitt må ringe flere enn 2 ganger (og når gjennom denne siste gangen) hver dag? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, f.eks. 0.053 og 0.125.

Er ute etter $P(\bar{X} > 2)$ hvor X_i er antall ganger han ringer per dag. X_i er geometrisk fordelt

$p = 0{,}2$, $\mu = \frac{1}{p} = 5$, $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 20$

$$\bar{X} = \frac{1}{28} \sum_{i=1}^{28} X_i$$

Bruker sentralgrenseteoremet, $n = 28$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{2-5}{\sqrt{\frac{20}{28}}} = \underline{-3{,}55}$$

$$P(\bar{X} > 2) = 1 - P(\bar{X} \leq 2) = 1 - P(Z \leq -3{,}55) = 1 - 0{,}0002$$

Tabell

$$= 0{,}9998 \approx \underline{\underline{1{,}000}}$$