Spørsmål 1

Tykkelsen X på et beskyttende belegg som påføres en elektrisk leder følger en kontinuerlig uniformfordeling på intervallet [4,5] mm.

(a) Hva er forventet tykkelse på belegget? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.293 eller 2.760.

$$E[X] = \frac{4+5}{2} = \underline{\underline{4{,}5}}$$

$$\mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

(b) Hva er variansen til tykkelsen på belegget? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.293 eller 2.670.

$$Var[X] = \frac{(5-4)^2}{12} = \underline{\underline{0{,}083}}$$

$$\mathbf{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(c) Hva er sannsynligheten for at tykkelsen på belegget er mindre enn 4.5 mm? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.230 eller 2.609.

$$P(X < 4{,}5) = F(x) = \frac{4{,}5-4}{5-4} = \underline{\underline{0{,}5}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a < x \leq b, \\ 1 & \text{for } x > b. \end{cases}$$

Spørsmål 2

Linus har 7 batterier liggende i en eske, hvorav 3 er av type A og 4 er av type B. Batterienes levetider antas uavhengige og eksponentialfordelte med forventning 12.0 timer for type A-batteriene og forventning 19.5 timer for type B-batteriene.

Linus velger et batteri tilfeldig fra esken.

(a) Hva er sannsynligheten for at levetiden til det valgte batteriet er større enn 15 timer? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$E_a[X] = 12 = \frac{1}{\lambda_a} \Rightarrow \lambda_a = \frac{1}{12}$$

$$E_b[X] = 19{,}5 = \frac{1}{\lambda_b} \Rightarrow \lambda_b = \frac{2}{39}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P(X>15) &= P(X>15 \mid A)\cdot P(A) + P(X>15 \mid B)\cdot P(B) \\
&= P(A)\left(1 - P(X<15)\right) + P(B)\left(1 - P(X<15)\right) \\
&= \frac{3}{7}\left(\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda_a x})\right) + \frac{4}{7}\left(\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda_b x})\right) \\
&= \frac{3}{7}e^{-\lambda_a x} + \frac{4}{7}e^{-\lambda_b x} \\
&= \frac{3}{7}e^{-\frac{15}{12}} + \frac{4}{7}e^{-\frac{30}{39}} \\
&= \underline{\underline{0{,}388}}
\end{aligned}$$

(b) Gitt at levetiden til det valgte batteriet er større enn 15 timer, hva er sannsynligheten for at det er et type B-batteri? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$P(Y=B \mid X>15) = \frac{P(X>15 \cap Y=B)}{P(X>15)} = \frac{\frac{4}{7}e^{-\frac{30}{39}}}{\frac{3}{7}e^{-\frac{15}{12}} + \frac{4}{7}e^{-\frac{30}{39}}} = \underline{\underline{0{,}683}}$$

Spørsmål 3

På et tivoli kan man kjøpe heliumballonger. Anta at det blåses opp og selges ballonger med en intensitet 20 pr. 30. minutt, og at det alltid er kø for å kjøpe ballonger.

(a) Hvor mange ballonger kan vi forvente at det blåses opp og selges på 4 timer? Oppgi svaret som et heltall.

$$E[X] = \frac{20}{0{,}5} = 40 \quad \text{(per time)}$$

$$\Rightarrow 4 \text{ timer gir } 4 \cdot 40 = \underline{\underline{160}}$$

(b) Vi stiller oss opp for å kjøpe en ballong og kommer heldigvis først i køen. Hva er sannsynligheten for at det tar mer enn 4 minutter før vi får ballongen vår? Oppgi svaret med fire desimaler, f.eks 0.3456.

La Y være antall min man må vente per ballon

$$E[Y] = \frac{30}{20} = 1{,}5$$

Dette tilsvarer en eksponensial fordeling

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}5 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$P(Y>4) = 1 - P(Y<4)$$

$$= \cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda x})$$

$$= e^{-\lambda x}$$

$$= e^{-\frac{2}{3}4}$$

$$= \underline{\underline{0{,}0694}}$$

(c) Vi synes en ballong var litt lite, så vi stiller oss i køen en gang til for å kjøpe enda en ballong. Foran oss står det 13 personer og siden vi har litt dårlig med tid spør vi hvor mange ballonger de skal ha. Heldigvis skal de bare ha en hver. Hvor mange minutter må vi forvente å vente før vi har fått enda en ballong? Oppgi svaret med to desimaler, f.eks 0.34.

Totalt skal det leveres 14 ballonger

$$\Rightarrow \quad E[Y] \cdot 14 = 1{,}5 \cdot 14 = \underline{\underline{21}}$$

Spørsmål 4

La Z være en standard normalfordelt stokastisk variabel.

(a) Hva er sannsynligheten $P(Z < 1.43)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.457 og 0.111.

Definisjon: Normalfordeling

En stokastisk variabel X er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians $\sigma^2 > 0$ dersom sannsynlighetstettheten til X er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

for $-\infty < x < \infty$. Vi kan alternativt si at X har en normalfordeling med forventningsverdi μ og varians σ^2. Dersom $\mu = 0$ og $\sigma^2 = 1$ sier vi at X er standard normalfordelt, alternativt at X har en standard normalfordeling.

$\Rightarrow \mu = 0, \ \sigma^2 = 1$

$$F(1{,}43) = \int_{-\infty}^{1{,}43} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1} e^{-\frac{1}{2}\cdot t^2}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{1{,}43} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Løst i symbolab $\Rightarrow \underline{\underline{0{,}923}}$

(b) Hva er sannsynligheten $P(1.26 < Z < 1.43)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.572 og 0.750.

$$P(1{,}26 < Z < 1{,}43) = P(Z < 1{,}43) - P(Z < 1{,}26)$$

$$= F(1{,}43) - F(1{,}26)$$

$$= \int_{1{,}26}^{1{,}43} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Symbolab $\Rightarrow \underline{0{,}027}$

La X være en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi $\mu = 1.4$ og standardavvik $\sigma = 2.9$.

(c) Hva er sannsynligheten $P(X > 3.9)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.454 og 0.124.

Tilsvarende som for a)

$$P(X > 3{,}9) = 1 - P(X < 3{,}9)$$

$$= 1 - F(X < 3{,}9)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{3{,}9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2{,}9} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-1{,}4)^2}{2{,}9^2}}\,dt$$

$$= 1 - 0{,}806 = \underline{0{,}194}$$

(d) Hva er sannsynligheten $P(1.8 < X < 3.9)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.454 og 0.124.

Tilsvarende som b), får

$$P(1{,}8 < X < 3{,}9) = \int_{1{,}8}^{3{,}9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2{,}9}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-1{,}4)^2}{2{,}9^2}}\, dt$$

$$= \underline{\underline{0{,}251}}$$

Spørsmål 5

I en bestemt elv kan kroppsvekten til fisk betraktes som normalfordelt med forventning 1.2 kg og standardavvik 0.4 kg.

Tore står ved elvebredden og fisker. Vi antar at sannsynligheten for at en fisk biter ikke er avhengig av kroppsvekt.

(a) Hva er sannsynligheten for at en fisk med kroppsvekt større enn 1.7 kg biter på kroken til Tore? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.237 og 0.694.

$$P(X > 1{,}7) = 1 - P(X < 1{,}7)$$

$$= 1 - F(1{,}7)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{1{,}7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{0{,}4}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-1{,}2)^2}{0{,}4^2}}\, dt$$

$$= 1 - 0{,}894$$

$$= \underline{\underline{0{,}106}}$$

(b) Hva er funksjonsverdien for sannsynlighetstettheten assosiert med en vekt på 1.7 kg? Oppgi svaret som en desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.237 og 0.694.

$$f(1{,}7) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{0{,}4}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(1{,}7-1{,}4)^2}{0{,}4^2}}$$

$$f(1{,}7) = \underline{\underline{0{,}457}}$$

I en relativt stillestående og grunn del av elven oppholder fisken seg lenge for å samle krefter. Tore drar dit for å fortsette fiskingen, hvor han treffer på en venn som har observert fisken der lenge. Han sier at det ikke er fisk under 1.0 kg her. Vi antar at vennen har rett, og at det ikke er noen fluks av fisk inn eller ut av det stillestående området i løpet av tidsrommet Tore er der (bortsett fra dem som blir fisket).

(c) Hva er funksjonsverdien for sannsynlighetstettheten assosiert med en vekt på 1.7 kg? (Hint: den opprinnelige sannsynlighetstettheten må trunkeres og normaliseres - pass på at den integrerer til 1!) Oppgi svaret som en desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.237 og 0.694.

La den nye funksjonen være $g(t) = k \cdot f(t)$

Normaliserer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \qquad / \text{ Ingen fisk under } 1{,}0 \text{ kg}$$

$$\int_{1}^{\infty} g(t)\, d = 1$$

$$k \cdot \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{0{,}4} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-1{,}2)^2}{0{,}4^2}} dt = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{0{,}69144} = 1{,}44626$$

$$\Rightarrow g(1{,}7) = 1{,}44626 \cdot f(1{,}7)$$

$$g(1{,}7) = 1{,}44626 \cdot 0{,}457$$

$$\underline{\underline{g(1{,}7) = 0{,}661}}$$

Spørsmål 6

En bedrift støper betongsylindere av en bestemt type. Betongsylinderene er karakterisert ved den såkalte sylindertrykkfastheten, dvs den maksimale belastning (i kg/cm^2) en sylinder kan utsettes for uten å knuses. Det kan antas at sylindertrykkfastheten er normalfordelt med forventningsverdi 194.5 og standardavvik 8.5. Sylindere med trykkfasthet under 183.5 betraktes som defekte.

(a) Hvor stor andel av produksjonen må bedriften regne med vil være defekt? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$P(X<183{,}5) = F(183{,}5)$$

$$= \int_{-\infty}^{183{,}5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{8{,}5} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-194{,}5)^2}{8{,}5^2}} dx$$

$$= 0{,}098$$

Anta nå at betongsylindere kontrolleres før salg ved å belastes med 183.5 kg/cm^2, og de defekte frasorteres.

(b) Hva er sannsynligheten for at en slik kontrollert sylinder har trykkfasthet under 189.875 kg/cm^2? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.051 og 0.252.

$$P(X<189{,}875 \mid X>183{,}5) = \frac{F(189{,}875) - F(183{,}5)}{1 - F(183{,}5)}$$

$$= \frac{0{,}293 - 0{,}098}{1 - 0{,}098}$$

$$= \underline{\underline{0{,}216}}$$

(c) Hva er sannsynligheten for at en kunde som kjøper 11 kontrollerte sylindere får høyst 2 med trykkfasthet under 189.875 kg/cm^2? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.456 og 0.235.

Dette tilsvarer binomisk fordeling

$$f(2) = \binom{11}{2} 0{,}216^2 \cdot 0{,}784^9 = 0{,}287$$

$$f(1) = \binom{11}{1} 0{,}216 \cdot 0{,}784^{10} = 0{,}208$$

$$f(0) = \binom{11}{0} 0{,}784^{11} = 0{,}069$$

$$P(X \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0) = \underline{\underline{0{,}564}}$$