Spørsmål 1

Det er en solfylt dag, og Scott fisker fra kai. Det er stor nok gjennomstrømning av fisk i området til at vi kan anta at antall fisk i nærheten av krokens bane er konstant i tidsrommet Scott fisker. Videre bruker Scott samme krok i alle kast, og vi antar at han ikke får noe læringseffekt i løpet av fisketuren. Vi vet at da er sannsynligheten for få fisk på et vilkårlig kast 0.05.

a) Hvor mange kast må Scott forvente å måtte gjøre for å få sin første fisk? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.578 og 2.412.

Forsøket har en negativ binomisk fordeling.

$$\Rightarrow \underline{\underline{E[X] = \frac{k}{p} = \frac{1}{0{,}05} = 20{,}000}}$$

b) Scott vil gjerne fange 5 fisk. Hvor mange kast må Scott forvente å måtte gjøre for å fange disse? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.578 og 2.412.

$$\underline{\underline{E[X] = \frac{5}{0{,}05} = 100{,}000}}$$

c) Scott bestemmer seg på forhånd for at han skal kaste 30 ganger. Hvor mange fisk kan Scott forvente å få? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.578 og 2.412.

$$E[X] = \frac{k}{0{,}05} = 30 \Rightarrow k = 30 \cdot 0{,}05$$

$$\underline{\underline{k = 1{,}5}}$$

Spørsmål 2

Jens skal fylle ut en tippekupong med 8 fotballkamper. For hver kamp har han tre alternativer: hjemme, uavgjort, eller borte. Jens kjenner ingen av lagene som spiller, så det kan antas at sannsynligheten for at han tipper riktig er $\frac{1}{3}$ for hver kamp. Videre kan det antas at Jens fyller ut alle kampene uavhengig av hverandre.

(a) Hva er sannsynligheten for at Jens tipper minst tre kamper riktig? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125

Dette følger binomisk sannsynlighetsfordeling

$$P(X=x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X=x) = 1 - 0{,}468$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{8}{0}\left(\tfrac{1}{3}\right)^0\left(\tfrac{2}{3}\right)^8 = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^8 = 0{,}03902 \\ P(X=1) &= \binom{8}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^1\left(\tfrac{2}{3}\right)^8 = \frac{8!}{0!\,7!} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^7 = 0{,}15607 \\ P(X=2) &= \binom{8}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^7 = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 = 0{,}27312 \end{aligned}}$$

$$\underline{\underline{P(X \geq 3) = 0{,}532}}$$

(b) Hva er forventet antall kamper tippet riktig? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$\underline{\underline{E[X] = n \cdot p = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}667}}$$

(c) Hva er variansen til antall kamper tippet riktig? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.053 og 0.125.

$$\underline{\underline{Var[X] = np(1-p) = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9} = 1{,}778}}$$

Spørsmål 3

En bedrift har 30 ansatte. Av disse er det 12 som er nyansatte. Hver måned velger sjefen en av de ansatte som får ansvar for å arrangere lønningspils. Du kan anta at sjefen ikke velger seg selv, og at han ikke inngår i de 30 ansatte. Du kan også anta at de som blir sett på som nyansatte i bedriften er nyansatte gjennom hele oppgaven.

(a) Anta at sjefen hver måned velger tilfeldig blant de ansatte. La X være en stokastisk variabel som beskriver antall ganger en nyansatt velges til å arrangere lønningspils i løpet av ett år. Finn sannsynligheten for at $X = 4$. Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.454 og 0.129.

Forsøket følger binomisk sannsynlighetsmodell

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\underline{\underline{b\left(4; 12, \tfrac{12}{30}\right) = \binom{12}{4} 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^8 = 0{,}213}}$$

(b) Sjefen velger fortsatt tilfeldig mellom de ansatte hver måned, men han bestemmer seg for at ingen kan velges igjen før alle de ansatte har arrangert en gang. La Y være en stokastisk variabel som beskriver antall nyansatte som velges til å arrangere lønningspils i løpet av ett år. Finn sannsynligheten for at $Y = 4$. Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.543 og 0.196.

Forsøket følger hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.

$$h(x; N, k, n) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-}}{\binom{N}{n}}$$

$$\underline{\underline{h(4; 30, 12, 12) = \frac{\binom{12}{4}\binom{18}{8}}{\binom{30}{12}} = 0{,}250}}$$

Spørsmål 4

Vi lager en mini-kortstokk bestående av 6 kort: spar ess, spar 2, spar 3, ..., spar 6. Fra minikortstokken trekker vi tilfeldig ett og ett kort *med tilbakelegging* inntil spar ess dukker opp. La i denne sammenheng X betegne antall trekninger som vi har utført i det vi trekker spar ess. Det vil si, hvis esset kommer i første trekning, tar X verdien $x = 1$, hvis esset kommer i annen trekning, tar X verdien $x = 2$, osv.

(a) Hva er forventet antall trekninger, $\mathrm{E}[X]$? (Tips! Hvilken fordeling har X?) Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

Dette er en negativ binomisk fordeling (eller geometrisk, k=1)

$$\Rightarrow \underline{\underline{E[X] = \frac{k}{p} = \frac{1}{1/6} = 6}}$$

(b) Hva er sannsynligheten for at vi må trekke mer enn to ganger, $P(X > 2)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=2) - P(X=1)$$

$$P(X=x) = g(x;p) = p(1-p)^{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(1;1/6) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6} \\ g(2;1/6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P(X>2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{25}{36} = 0{,}694}}$$

Spørsmål 5

Anta at en drikkeprodusent tilsetter små gullflak i en drikkebeholder, med en gjennomsnittlig rate på 850 flak per L drikke. En beholder på 1 L blir valgt tilfeldig, ristet kraftig, og en 9 mL prøve blir umiddelbart trukket. La X være antall gullflak i prøven.

Du kan anta at gullflakene er tilfeldig og uavhengig fordelt i drikken, og du kan også anta at gullflakene ikke deles i flasken, altså at det ikke oppstår halve gullflak.

(a) Hva vil være forventningsverdien til X? (Tips: Hva slags fordeling har X?) Oppgi svaret som et desimaltall med en desimal, for eksempel 3.4 og 0.3.

$p = \frac{\text{gullflak}}{\text{milliliter}}$

$n = 1$ (ett forsøk)

$t = 9$ (9 mL)

Bruker poissonfordeling, la hendelse være å finne gullflak, og "tidsakse" være antall milliliter i prøven.

$$\underline{\underline{E[X] = \lambda t = n \cdot p \cdot t = 1 \cdot \frac{850}{1000} \cdot 9 = 7{,}65}}$$

(b) Hva er sannsynligheten for at prøven inneholder nøyaktig 4 flak av gull? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.456 og 0.345.

$$p(x : \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

$$\underline{\underline{p(4 : 7{,}65) = \frac{7{,}65^4}{4!} e^{-7{,}65} = 0{,}068}}$$

(c) Hva er sannsynligheten for at prøven inneholder mer enn 9 flak av gull gitt at den inneholder mer enn 6 flak av gull? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.143 og 0.753.

kalkulator på nett

$$P(X>9 \mid X>6) = \frac{P(X>9 \cap X>6)}{P(X>6)} = \frac{P(X>9)}{P(X>6)} = \frac{1-P(X\leq 9)}{1-P(X\leq 6)} = \frac{1-0{,}75899}{1-0{,}35796}$$

$$\underline{\underline{P(X>9 \mid X>6) = 0{,}375}}$$

Spørsmål 6

Bjørg skal kartlegge antall snegler i hagen sin. Hagen kan betraktes som et rutenett av ikke-overlappende ruter på én kvadratmeter, og det er rimelig å anta at antall snegler i hver rute er uavhengig av antall snegler i de andre rutene. Den stokastiske variabelen X er antall snegler i en tilfeldig rute, og følger en poissonfordeling med forventning 0.5.

a) Hva er sannsynligheten for at Bjørg finner 1 snegle(r) i en tilfeldig rute? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.113 og 0.832.

$$\lambda t = 0{,}5$$

$$\underline{\underline{p(1; 0{,}5) = \frac{0{,}5^1}{1!} e^{-0{,}5} = 0{,}303}}$$

b) Bjørgs hage består av 32 ruter. Totalt antall snegler i hagen følger da en poissonfordeling med forventning 16.0. Hva er sannsynligheten for at Bjørg finner mer enn 18 snegler i hagen sin? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.113 og 0.832.

$$\lambda t = 16 \,,\; x = 18$$

$$P(X>18) = 1 - P(X\leq 18) = 1 - 0{,}7423 = \underline{\underline{0{,}2577}}$$

fra tabell

Bjørg har saumfart hele hagen sin og vet nå at den inneholder 15 snegler, hvorav 12 er brunskogsnegler og 3 er hvitflankeskogsnegler. Vi antar at antall snegler ikke endrer seg gjennom resten av oppgaven.

Mens middagen gjør seg ferdig i ovnen går Bjørg ut og salter snegler. Vi antar at en snegles arttype ikke påvirker sannsynligheten for å finne den (det er kun det relative antallet som er avgjørende). Bjørg rekker å salte 12 snegler.

c) Hva er sannsynligheten for at hun saltet 10 brunskogsnegler? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.113 og 0.832.

Dette følger hypergeometrisk modell

$$h(x=10; N=15, k=12, n=12) = \frac{\binom{12}{10}\binom{3}{2}}{\binom{15}{12}} = \frac{\frac{12!}{10!\,2!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!}}{\frac{15!}{12!\,3!}} = \frac{\frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6}} = \underline{\underline{0{,}435}}$$

Bjørg salter sneglene veldig konsekvent. Det er rimelig å anta at alle snegler får samme (relative) behandling. Det viser seg at når en snegle blir saltet slik Bjørg gjør det, er sannsynligheten for at den dør lik 0.6. Dette gjelder for begge artstyper.

d) Hva er sannsynligheten for at 7 snegler dør? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.113 og 0.832.

Dette blir binomisk fordeling

$$b(x=7; n=12, p=0{,}6) = \frac{12!}{7!\,5!}\, 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^5 = \underline{\underline{0{,}227}}$$