Spørsmål 1

Den diskrete stokastiske variablen X har følgende punktsannsynligheter:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.15	0.185	0.095	0.034	0.536

(a) Hva er sannsynligheten $P(X \leq 3)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.423 og 0.349.

a) $P(X \leq 3) = 0{,}15 + 0{,}185 + 0{,}095 + 0{,}034 = \underline{\underline{0{,}464}}$

(b) Hva er sannsynligheten $P(X = 3 \mid X \leq 3)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.534 og 0.123.

b) $P(X = 3 \mid X \leq 3) = \dfrac{P(X=3 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \dfrac{P(X=3)}{P(X \leq 3)} = \dfrac{0{,}034}{0{,}464} = \underline{\underline{0{,}073}}$

Spørsmål 2

La X være en diskret stokastisk variabel som kan anta verdier i mengden $1, \ldots, 6$. Anta at X har sannsynlighetsfordeling gitt ved

$f(x) = kx^{0.1}$

der k er en konstant.

(a) Hvilken verdi må k ha? Oppgi svaret som et desimaltall med fire desimaler, for eksempel 0.0531 og 0.1255.

a) For en diskret stokastisk variabel, er $\sum_x f(x) = 1$

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) = 1$$

$$k \cdot 1 + k \cdot 2^{0{,}1} + k \cdot 3^{0{,}1} + k \cdot 4^{0{,}1} + k \cdot 5^{0{,}1} + k \cdot 6^{0{,}1} = 1$$

$$6{,}707445 \cdot k = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = 0{,}1491}}$$

(b) Hva er sannsynligheten $P(X > 4)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

b) $P(X>4) = P(X=5) + P(X=6)$

$= f(5) + f(6)$

$= 0{,}1491\,(5^{0{,}1} + 6^{0{,}1})$

$= \underline{\underline{0{,}353}}$

Spørsmål 3

Vi skal i denne oppgaven se på ankomsttider for et lokaltog ved en bestemt togstasjon. Toget skal i følge rutetabellen ankomme stasjonen hver hverdag kl 08:00, men ankommer i praksis alltid noe etter dette tidspunktet. La T betegne togets forsinkelse, i antall minutter, på en tilfeldig valgt hverdag. Vi antar at T kan betraktes som en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetsfordeling

$$f(t) = \begin{cases} 4.0te^{-2.0t}, & t > 0, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

(a) Hva er sannsynligheten for at toget er mer enn 2.3 minutter forsinket? Oppgi svaret som et desimaltall med fire desimaler, for eksempel 0.0531 og 0.1255.

a) $P(T>2{,}3) = \int_{2{,}3}^{\infty} f(t)\,dt$

$= \int_{2{,}3}^{\infty} 4{,}0t \cdot e^{-2{,}0t}\,dt$

$\int 4te^{-2t}\,dt \quad \left[u = -2t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -2,\ dt = -\frac{du}{2},\ t = -\frac{1}{2}u\right]$

$= \int \frac{4}{4} ue^{u}\,du = \int ue^{u}\,du = [ue^{u}] - \int e^{u}\,du = [ue^{u}] - [e^{u}]$

$= [ue^{u} - e^{u}] = [-2te^{-2t} - e^{-2t}]$

$= \left[-2te^{-2t} - e^{-2t}\right]_{2{,}3}^{\infty}$

$= \underline{\underline{0{,}0563}}$

(b) Gitt at toget er mer enn 2.3 minutter forsinket, hva er sannsynligheten for at det er mer enn 4 minutter forsinket? Oppgi svaret som et desimaltall med fire desimaler, for eksempel 0.0531 og 0.1255.

b) $P(X>4 \mid X>2{,}3) = \dfrac{P(X>4 \cap X>2{,}3)}{P(X>2{,}3)} = \dfrac{P(X>4)}{P(X>2{,}3)} = \dfrac{9/e^8}{0{,}0563} = \underline{\underline{0{,}0536}}$

$$P(X>4) = \int_4^\infty f(t)\,dt$$
$$= 2\cdot 4 e^{-2\cdot 4} + e^{-2\cdot 4} = \frac{9}{e^8}$$

Spørsmål 4

Hans skal handle klær på et bestemt kjøpesenter. På senteret er det to klesbutikker han vurderer å besøke, men han har kun tid til å besøke én, så han må gjøre et valg. Den stokastiske variabelen X beskriver butikkvalget til Hans, og tar følgelig kun to verdier; 1 og 2. Sannsynlighetsfordelingen til X er

$$p(x) = 0.52^{2-x} 0.48^{x-1}; \quad x = 1, 2.$$

Den stokastiske variabelen Y beskriver antall plagg Hans kjøper. Sannsynlighetsfordelingen til Y er kjent for hver butikk:

$$p(y|X = x) = \frac{x^y e^{-x}}{y!}; \quad y \in \mathbb{N}.$$

a) Hva er sannsynligheten for at Hans går i butikk 1 og kjøper 5 plagg? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, f.eks. 0.156 og 0.862.

a) $P(X=1 \cap Y=5) = \dfrac{P(Y=5 \mid X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{p(5 \mid X=1)}{p(1)} = \dfrac{\frac{1^5 e^{-1}}{5!}}{0{,}52} = \underline{\underline{0{,}006}}$

b) Hva er sannsynligheten for at Hans kjøper 1 plagg? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, f.eks. 0.156 og 0.862.

b) $P(Y=1) = P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1)$

$$= p(1 \mid X=1)\,p(1) + p(1 \mid X=2)\,P(2)$$
$$= \frac{1e^{-1}}{1!}\cdot 0{,}52 + \frac{2e^{-2}}{1!}\cdot 0{,}48$$

$\underline{\underline{P(Y=1) = 0{,}321}}$

Spørsmål 5

La X og Y være to kontinuerlige stokastiske variabler med simultanfordeling

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & \text{for } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

(a) Hva er sannsynligheten $P(X \leq 1.6)$? Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

a)
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}\,dy$$
$$= xe^{-x}\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy$$
$$= \cancel{x}e^{-x}\left[-\frac{1}{\cancel{x}}e^{-xy}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$
$$= e^{-x}(-0+1)$$
$$= e^{-x}$$

$$\boxed{x>0 \Rightarrow \lim_{y\to\infty} e^{-xy} = 0}$$

$$P(X \leq 1{,}6) = \int_0^{1{,}6} g(x)\,dx$$
$$= \int_0^{1{,}6} e^{-x}\,dx$$
$$= -\left[e^{-x}\right]_0^{1{,}6}$$
$$= -\left(e^{-1{,}6} - 1\right)$$

$$\underline{\underline{P(X \leq 1{,}6) = 0{,}798}}$$

(b) Hva er sannsynligheten $P(0.1 < Y < 0.8 | X = 2.1)$?Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

b)
$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{xe^{\cancel{-x}-yx}}{\cancel{e^{-x}}} = xe^{-yx}$$

$$P(0{,}1 < Y < 0{,}8 \,|\, X=2{,}1) = \int_{0{,}1}^{0{,}8} 2{,}1\,e^{-2{,}1y}\,dy$$
$$= \cancel{2{,}1}\left[-\frac{1}{\cancel{2{,}1}}e^{-2{,}1y}\right]_{0{,}1}^{0{,}8}$$
$$= -\left(e^{-1{,}68} - e^{-0{,}21}\right) = \underline{\underline{0{,}624}}$$

Spørsmål 6

Ved en liten bedrift arbeides det i to skift, et dagskift og et kveldsskift. Lederne av bedriften er interessert i å studere fraværsmønsteret og har derfor gjennom lengre tid registrert fravær i hvert av de to skiftene. La $X \in \{0, 1, 2\}$ betegne antall fraværende fra arbeid i dagskiftet en bestemt dag og $Y \in \{0, 1, 2, 3\}$ betegne antall fraværende fra arbeid i kveldsskiftet samme dag. Lederne av bedriften er kommet frem til en simultanfordeling til X og Y, $P(X = x, Y = y)$, som vist i tabellen under.

x \ y	0	1	2	3
0	0.46	0.14	0.03	0
1	0.08	0.08	0.02	0.01
2	0.06	0.08	0.03	0.01

(a) Hva er sannsynligheten for at det en gitt dag ikke vil være noe fravær under dagskiftet ($P(X = 0)$)? Oppgi svaret som et desimaltall med to desimaler, for eksempel 0.01 og 0.12.

a) La $f(x,y)$ være $P(X=x, Y=y)$

$$P(X=0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) + f(0,3)$$
$$= 0{,}46 + 0{,}14 + 0{,}03 + 0$$
$$\underline{\underline{P(X=0) = 0{,}63}}$$

(b) Hva er sannsynligheten for at det en gitt dag både vil være fravær under dagskiftet og fravær under kveldsskiftet ($P(X > 0, Y > 0)$)? Oppgi svaret som et desimaltall med to desimaler, for eksempel 0.01 og 0.12.

b) $$P(X>0, Y>0) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} f(x,y)$$
$$= (0{,}08 + 0{,}02 + 0{,}01) + (0{,}08 + 0{,}03 + 0{,}01)$$
$$\underline{\underline{P(X>0, Y>0) = 0{,}23}}$$

(c) Hva er sannsynligheten for at antall fraværende på kveldsskift en gitt dag skal være større enn antall fraværende på dagskiftet samme dag ($P(Y > X)$)? Oppgi svaret som et desimaltall med to desimaler, for eksempel 0.01 og 0.12.

$$P(Y>X) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y>x}^{3} f(x,y)$$
$$= (0{,}14 + 0{,}03 + 0) + (0{,}02 + 0{,}01) + (0{,}01)$$
$$\underline{\underline{P(Y>X) = 0{,}21}}$$