Spørsmål 1

Anta at vekten, i kilogram, til en tilfeldig utvalgt laks i et oppdrettsanlegg er normalfordelt med ukjent forventningsverdi μ og kjent standardavvik $\sigma = 0.2$.

Vi er interessert i å estimere forventningsverdien μ. I denne sammenheng har vi fanget og veid 10 laks fra oppdrettsanlegget. Gjennomsnittsvekten til disse 10 laksene ble 4.038 kg.

(a) Regn ut et 90% konfidensintervall for μ basert på våre 10 observasjoner. Oppgi grensene i intervallet som desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

Bruker $\hat{\mu} = \bar{X}$

$$\Rightarrow E[\hat{\mu}] = E\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \frac{1}{10} E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} E[X_i] = \frac{1}{} \cdot \mu = \mu$$

$$\Rightarrow Var[\hat{\mu}] = Var\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \frac{1}{10^2}\sum_{i=1}^{10} Var[X_i] = \frac{1}{10^2} \cdot 10 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{10}$$

Standardiserer:

$$Z = \frac{\hat{\mu} - E[\hat{\mu}]}{\sqrt{Var[\hat{\mu}]}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/10}} \sim n(z; 0, 1)$$

Har 0,90-konfidensintervall $\Rightarrow \alpha = 0{,}10$

Siden normalfordeling er symmetrisk om 0, er $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05}$, slår opp (s. 3 i tabellen) $\Rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645$

$$\Rightarrow P\left(-z_{0{,}05} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/30}} \leq z_{0{,}05}\right) = 0{,}9$$

$$P\left(-1{,}645 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/}} \leq 1{,}645\right) = 0{,}9$$

Må løse: $-1{,}645\sqrt{\sigma^2/10} - \bar{X} \leq -\mu \leq 1{,}645\sqrt{\sigma^2/10} - \bar{X} \quad | \cdot -1$

$$\bar{X} + 1{,}645\sqrt{\sigma^2/10} \geq \mu \geq \bar{X} - 1{,}645\sqrt{\sigma^2/10}$$

$$\bar{X} - 1{,}645\sqrt{\sigma^2/10} \leq \mu \leq \bar{X} + 1{,}645\sqrt{\sigma^2/10}$$

Setter inn tall: $3{,}934 \leq \mu \leq 4{,}142$

(b) Regn også ut et 95% konfidensintervall for μ basert på våre 10 observasjoner. Oppgi grensene i intervallet som desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

$$0,95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \,, \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,025} = 1,96$$

$$\bar{x} - 1,96\sqrt{\sigma^2/_{10}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,96\sqrt{\sigma^2/_{10}}$$

Setter inn tall: $\underline{\underline{3,914 \leq \mu \leq 4,162}}$

Spørsmål 2

To ansatte ved en potetmelfabrikk har fått i oppgave å sammenligne to analysemetoder, A og B, til bestemmelse av stivelsesinnholdet i poteter. De går frem som følger. 10 poteter med varierende stivelsesinnhold nummereres og deles i to. For potet nr.*j*, *j* = 1, ..., 10, analyseres så den ene halvdelen med metode A, mens den andre halvdelen analyseres med metode B. Det antas at for potet nr. *j*, *j* = 1, ..., 10, så har begge halvdelene samme prosentvise stivelsesinnhold.

La $D_j, j = 1, \ldots, 10$ betegne differansen mellom anslått prosentvis stivelsesinnhold ved metode A og B for potet nr. *j*, og la $d_1, \ldots, d_{10}$ betegne tilhørende observerte verdier. Anta at alle $D_1, \ldots, D_{10}$ er uavhengige og normalfordelte med ukjent forventning μ og ukjent varians σ^2. Forsøket resulterte i følgende:

$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} d_j = 0.41684$ og $\sum_{j=1}^{10}(d_j - \bar{d})^2 = 0.43267$

Regn ut et 95% konfidensintervall for μ. Oppgi nedre og øvre grense i intervallet som desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125.

Estimerer σ^2 med S^2, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$, $n = 10 \Rightarrow S^2 = 0,0480744\ldots$

Får da $T = \frac{\bar{D}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$, med t-fordeling. $0,95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,05, \frac{\alpha}{2} = 0,025$

t_α er symmetrisk om 0

Har da: $P\left(-t_{0,025,9} \leq \frac{\bar{D}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq t_{0,025,9}\right) = 0,95$, $t_{0,025,9} = 2,262$

$$\Rightarrow \bar{D} - 2,262\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{D} + 2,262\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$$0,41684 - 2,262\sqrt{\frac{0,43267}{9\cdot 10}} \leq \mu \leq 0,41684 + 2,262\sqrt{\frac{0,43267}{9\cdot 10}}$$

$$\underline{\underline{0,260 \leq \mu \leq 0,574}}$$

Spørsmål 3

Thea jobber som telefonselger, og i løpet av en uke på jobben har hun ringt 300 kunder. Av disse var det 120 kunder som ønsket å kjøpe produktet hun selger.

Finn et tilnærmet 95% konfidensintervall for sannsynligheten for at en tilfeldig kunde Thea ringer, vil kjøpe produktet hennes (siden antall forsøk er så stort, kan man her estimere estimatorens varians uten stor tilnærmingsfeil). Oppgi grensene i intervallet som desimaltall med tre desimaler, for eksempel 0.053 og 0.125

X: Antall kunder som kjøper, har binomisk fordeling.

Estimerer $\hat{p} = \frac{X}{n}$

$$E[\hat{p}] = \frac{1}{n} E[X] = \frac{1}{n} pn = p$$

$$Var[\hat{p}] = \frac{1}{n^2} Var[X] = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Normaliserer $Z = \frac{\hat{p} - p}{\frac{p(1-p)}{n}}$, estimerer $\frac{p(1-p)}{n}$ med $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ for å forenkle beregningene. (Gitt i oppgaven)

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$, la $k = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{300}}$

$$P\left(-1{,}96 \leq \frac{\hat{p}-p}{k} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \hat{p} - 1{,}96 \cdot k \leq p \leq \hat{p} + 1{,}96 \cdot k$$

$$0{,}4 - 1{,}96 \cdot k \leq p \leq 0{,}4 + 1{,}96 \cdot k$$

$$\underline{\underline{0{,}345 \leq p \leq 0{,}455}}$$

Spørsmål 4

Kjell klipper plenen i hagen sin hver uke til samme tid i løpet av sommeren. Vekten av gresset som klippes i "sommeruke" j, X_j, avhenger i stor grad av været, og antas å være normalfordelt med forventning μ og kjent standardavvik $\sigma = 0.25$ kg. I løpet av de første fire sommerukene har Kjell registrert vektene $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4.3, 3.7, 3.9, 3.6)$. Vi antar at vekten av gresset som klippes er uavhengig fra uke til uke.

Finn et 90% prediksjonsintervall for vekten av gresset Kjell må klippe den femte uken. Oppgi svaret som et desimaltall med tre desimaler, som f.eks. 0.423 og 2.138.

Estimerer μ med $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{4{,}3 + 3{,}7 + 3{,}9 + 3{,}6}{4} = 3{,}875$, $\hat{\mu}$ er forventningsrett for normalfordeling. La $X^* =$ Vekt uke 5, har da $E[X^*] = \mu$

$$\Rightarrow E[X^* - \bar{X}] = E[X^*] - E[\bar{X}] = \mu - \mu = 0$$

$$\mathrm{Var}[X^* - \bar{X}] = \mathrm{Var}[X^*] + \mathrm{Var}\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \sigma^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n}\,\sigma^2$$

$$= \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Normaliserer: $Z = \dfrac{(X^* - \bar{X}) - E[X^* - \bar{X}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X^* - \bar{X}]}} = \dfrac{X^* - \bar{X}}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

$$P(-1{,}645 \leq Z \leq 1{,}645) = 0{,}90$$

$$\Rightarrow \quad -1{,}645 \leq \frac{X^* - \bar{X}}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \leq 1{,}645$$

$$\bar{X} - 1{,}645\sqrt{\sigma^2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)} \leq X^* \leq \bar{X} + 1{,}645\sqrt{\sigma^2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)}$$

La $\bar{X} = 3{,}875$, $n = 4$, $\sigma = 0{,}25$

$$\Rightarrow \quad 3{,}415 \leq X^* \leq 4{,}335$$

Spørsmål 5

Geir brukar å handle smågodt kvar laurdag. Me antar at vekta (i gram) på smågodtet han kjøper kvar laurdag er normalfordelt med (ukjent) forventning μ og (ukjent) standardavvik σ. Vidare antar me at kor mykje smågodt Geir handlar ein laurdag er uavhengig av kor mykje han handlar alle andre laurdagar.

Dei siste 15 laurdagane fortel Geir at han i gjennomsnitt har handla $\bar{x} = 390$ gram smågodt med eit empirisk standardavvik på $s = 25$ gram. Regn ut eit 95% prediksjonsintervall for mengda smågodt (i gram) Geir kjøper neste laurdag. Oppgi nedre og øvre grenser i intervallet som desimaltal med 2 desimalar, for eksempel 20.01 eller 400.14.

Har ukjent σ, men kjent s $\Rightarrow$ Må gjøre om til t-fordeling

Bruker $\hat{\mu} = \bar{X}$, som for spm. 4 blir $E[X^* - \bar{X}] = 0$

$$Var[X^* - \bar{X}] = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Omgjør til t-fordeling $\Rightarrow$ $Var[X^* - \bar{X}] = s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

La $T = \frac{X^* - \bar{X}}{\sqrt{s^2(1+\frac{1}{n})}}$, $n = 15 \Rightarrow \nu = 14$, $t_{0{,}025,14} = 2{,}145$

Tilsvarende spm 4, vil da:

$$\bar{X} - 2{,}145 \cdot \sqrt{s^2(1+\tfrac{1}{n})} \leq X^* \leq \bar{X} - 2{,}145 \cdot \sqrt{s^2(1+\tfrac{1}{n})}$$

La $\bar{X} = 390$, $s = 25$, $n = 15$

$$\underline{\underline{334{,}61 \leq X^* \leq 445{,}38}}$$

Spørsmål 6

Old Faithful er en geysir i Yellowstone National Park i Wyoming, USA. Flere ganger om dagen har geysiren utbrudd hvor varmt vann og damp blir kastet høyt opp i luften. I denne oppgaven skal vi undersøke tiden, i minutter, mellom to påfølgende utbrudd.

For 14 påfølgede utbrudd, har vi notert tiden mellom hver av dem. Dette har gitt oss 13 observasjoner, $y_1, \ldots, y_{13}$, der y_i betegner tiden, i minutter, mellom utbrudd nr. i og utbrudd nr. $i+1$, for $i = 1, \ldots, 13$. Vi antar at observasjonene representerer et tilfeldig utvalg fra en normalfordeling med forventning μ og standardavvik σ, der både μ og σ er ukjente.

Observasjonene våre resulterte i følgende:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{13} \frac{y_i}{13} = 70.51, \sum_{i=1}^{13} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{12} = 5.23.$$

(a) Regn ut et 90% konfidensintervall for forventet tid, μ, mellom to påfølgende utbrudd. Oppgi grensene for intervallet som desimaltall med to desimaler, for eksempel 13.12 og 0.02.

Estimerer σ^2 med s^2, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$, $n = 13 \Rightarrow s^2 = 5{,}23$

Får da $T = \frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}$, med t-fordeling. $0{,}9 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}1$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

t_α er symmetrisk om 0

Har da: $P\left(-t_{0{,}05,12} \leq \frac{\bar{y} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0{,}05,12}\right) = 0{,}90$, $t_{0{,}05,12} = 1{,}782$

$$\Rightarrow \bar{y} - 1{,}782\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{y} + 1{,}782\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$$70{,}51 - 1{,}782\sqrt{\frac{5{,}23}{13}} \leq \mu \leq 70{,}51 + 1{,}782\sqrt{\frac{5{,}23}{13}}$$

$$\underline{\underline{69{,}38 \leq \mu \leq 71{,}64}}$$

(b) Regn ut et 90% prediksjonsintervall for tiden (i minutter) frem til neste utbrudd. Oppgi grensene for intervallet som desimaltall med to desimaler, for eksempel 13.12 og 0.02.

Bruker $\hat{\mu} = \bar{X}$, som for spm. 4 blir $E[X^* - \bar{X}] = 0$

$\text{Var}[X^* - \bar{X}] = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, bruker t-fordeling

$$\Rightarrow \text{Var}[X^* - \bar{X}] = s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

La $T = \frac{X^* - \bar{X}}{\sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}$, $t_{\frac{\alpha}{2}, v} = t_{0{,}05,12} = 1{,}782$

$$P(-1{,}782 \leq Z \leq 1{,}782) = 0{,}90$$

$$\Rightarrow -1{,}782 \leq \frac{X^* - \bar{X}}{\sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \leq 1{,}782$$

$$\bar{X} - 1{,}782\sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq X^* \leq \bar{X} + 1{,}782\sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$70{,}51 - 1{,}782\sqrt{5{,}23^2\left(1 + \frac{1}{13}\right)} \leq X^* \leq \bar{X} + 1{,}782\sqrt{5{,}23^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\underline{\underline{66{,}28 \leq X^* \leq 74{,}74}}$$