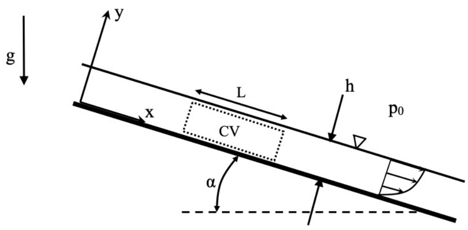
Øving 6

Oppgave 1



En væskefilm med tetthet ρ og viskositet μ renner laminært og stasjonært ned langs en rett plate som har en helning α med horisontalplanet. Væskefilmen har en konstant tykkelse h, og friksjonskraft mot atmosfæren kan neglisjeres.

Vi får oppgitt følgende forslag til løsning av strømningen:

$$p(y) = p_0 + \rho g \cos\alpha (h - y) \quad \text{og} \quad v_x(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}\left(yh - \frac{1}{2}y^2\right)$$

a) Kontrollèr at grensebetingelsene for trykk og hastighet stemmer.

b) Betrakt kontrollvolumet CV plassert oppå plata vist i figuren som et stiplet rektangel. Kontrollvolumet har en lengde L i x-retningen, en høyde h i y-retningen, og en bredde B inn i papirplanet (z-retningen). Finn kreftene som virker på væsken inne i kontrollvolumet i både x- og y-retning, og vis at disse summeres til null.

a) For trykk:

Skal ha at overflaten har atmosfæretrykk

$$\Rightarrow p(y=h) = p_0$$

$$p(h) = p_0 + \rho g \cos\alpha \cdot \underbrace{(h-h)}_{=0}$$

$$p(h) = p_0 \Rightarrow \text{ok!}$$

For fart:

- Væsken i kontakt med plata skal ha

$$V_x = 0$$

$$\Rightarrow V_x(y=0) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}(0-0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ok!}$$

a) For fart

Skal også ha at det ikke virker friksjonskraft på væsken ved $y = h$

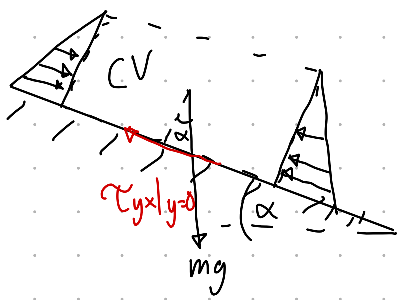
$$\rightarrow \tau_{yx}\big|_{y=h} = 0$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dV_x}{dy} = -\cancel{\mu}\frac{\rho g \sin\alpha}{\cancel{\mu}}(h-y)$$

$$\tau_{yx}\big|_{y=h} = \rho g \sin\alpha (h-h) = 0 \Rightarrow \text{ok!}$$

De stemmer

b) Får:



Dekomponerer i x- og y-retning

• - X-retning

Friksjon $\tau_{yx}|_{y=0}$

Trykk F_{px}

Tyngde G_x

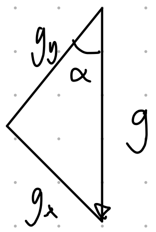
Akselerasjon

$$\tau_{yx}|_{y=0} \underset{\text{fra a)}}{=} -\rho g h \sin\alpha \cdot \underbrace{L \cdot B}_{\text{må ha med hele flaten}}$$

$F_{px} = \rho g h^2 \frac{B}{2} \cos\alpha$, fordi det er like mye film på hver side av CV, vil det være to like store, motsatt rettede F_{px} => Kanselleres

$$\Sigma F_{px} = 0$$

$$G_x = m g_x = \rho \cdot L \cdot B \cdot h \cdot g \sin\alpha = \rho g LBh \cdot \sin\alpha$$



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{g_x}{g} \Rightarrow g_x = g \cdot \sin\alpha$$

$$\Sigma F_x = \tau_{yx}|_{h=0} + \Sigma F_{px} + G_x = -\rho g LBh \cdot \sin\alpha + 0 + \rho g LBh \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow \text{ok}$$

I tillegg, massebevaring: $\dot{m}_{inn} = \dot{m}_{ut}$ (stasjonær strøm, $\dot{m} = q \cdot \rho \cdot V_x$)

$$(\rho q V_x)_{inn} = (\rho q V_x)_{ut}$$ / Har uendret areal, inkompressibel fluid => ρ = const. har også q = const

$$V_{x\,inn} = V_{x\,ut}$$

Hvikel også stemmer siden V_x er en funksjon av høyden

=> $V_{x\,inn} = V_{x\,ut}$ i alle "høydelag"

• y-retning

Trykkraft F_{py}, får ikke motsatt rettet pga tyngderetningen

Tyngden G_y

$$\left.\begin{aligned} F_{py} &= \rho g LBh \cos\alpha \\ G_y &= m g_y \underset{\text{positiv y-retning er definert oppover}}{=} -\rho g LBh \cos\alpha \end{aligned}\right\} \Sigma F_y = 0$$

$\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ Sant

Lille Per blir mobbet av nabogutten som har kjøpt seg en dyr og kraftig "Water Blaster" (vann-pisol). Lille Per har ingen penger, så vi skal hjelpe han med å lage en billig og effektiv vannpistol. I naboens hage kapper lille Per av 50 cm hageslange med 1 cm diameter. Slangen har en påmontert dyse med åpningsdiameter 0.5 cm. Fra naboguttens sykkel henter lille Per en ventil og en sykkelpumpe.

Sykkelventilen monteres i korken på en 1.5 liter brusflaske i plast. Hageslangen festes i flaskens bunn, og vi har en vannpistol-konstruksjon som skissert i figuren neste side. Flasken fylles halvveis med vann, og lufttrykket inne i flasken økes med sykkelpumpen.

Tyngdens aksellerasjon er $g = 10\ m/s^2$, vannet har tetthet $\rho = 1000\ kg/m^3$, og brusflasken har en diameter på 10 cm.

Etter hvert som vannet strømmer ut vil lufttrykket inne i flasken bli mindre. Neglisjer dette og regn med statiske forhold inne i flasken i hele oppgaven.

a) Lille Per er ikke så sterk, men han klarer å løfte 10 kg. Denne kraften bruker han på sykkelpumpen som har en indre diameter på 1 tomme (=2.54 cm). Hvor stort trykk oppnår lille Per i luftlommen inne i flasken?

Savage

b) Ved å tappe naboens bildekk får lille Per et overtrykk på 240000 Pa i flasken. Finn et estimat på vannets utløpshastighet V_{ut} ved å regne strømningen gjennom slangen og dysen uten tap. Hva blir Reynoldstallet N_{Re} i slangen ? Bruk $\nu = 10^{-6}\ m^2/s$ for vannets kinematiske viskositet.

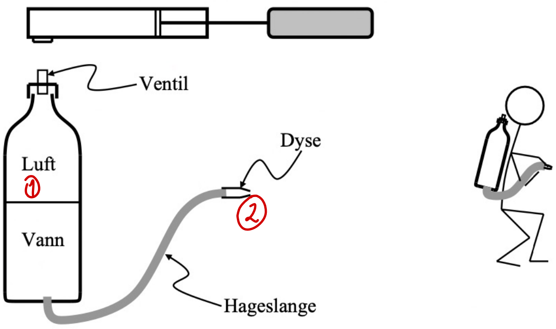
c) Vi forutsetter turbulent strømning gjennom slangen. Ta hensyn til tap over rørkontraksjon gitt ved

$$K_C = 0.55\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$$

der A_1 og A_2 er rørtverrsnittene før og etter kontraksjonen (innsnevringen). Neglisjèr friksjonstapet i vannslangen og finn vannets utløpshastighet V_{ut} nå.

d) Friksjonstapet i vannslangen kan enkelt modelleres med tapsformelen $\mathbf{f} = 0.079/(N_{Re})^{0.25}$. Anta en gjennomsnittshastighet på 10 m/s i vannslangen, og vurdèr hvor mye svaret i spørsmål c) endres.
Vil utløpshastigheten øke eller avta hvis lille Per bruker batterisyre ($\nu = 5.0\cdot10^{-6}\ m^2/s$) eller bensin ($\nu = 0.5\cdot10^{-6}\ m^2/s$) i stedet for vann ?

ikke kødd med Per!



Tyngdens aksellerasjon er $g = 10\ m/s^2$, vannet har tetthet $\rho = 1000\ kg/m^3$, og brusflasken har en diameter på 10 cm.

a) Siden de er koblet sammen, er

$$P_{flaske} = P_{pumpe}$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{10\ kg \cdot 10\ m/s^2}{\frac{\pi}{4}(2{,}54\cdot10^{-2}\ m)^2} = \underline{\underline{197{,}3\ kPa}}$$

b) Bruker Bernoulli, og antar at vannoverflaten inne i flaska er på høyde med dysa, antar også at $A_1 \gg A_2 \Rightarrow V_1 \ll V_2 \Rightarrow V_1$ er neglisjerbar

$$\frac{P_1}{\rho} + 0 + 0 = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_{atm})}{\rho}} \quad \Big/ \ P_1 = P_{overtrykk} + P_{atm} \Rightarrow P_1 - P_{atm} = P_{overtrykk}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 240\,000\ Pa}{10^3\ kg/m^3}} = \sqrt{480} = \underline{\underline{21{,}91\ m/s}}$$

I slangen: massebevaring

$$q = const$$

$$\Rightarrow V_s \frac{\pi}{4} D_s^2 = V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2$$

$$V_s = V_2 \left(\frac{D_2}{D_s}\right)^2 = 21{,}91\ m/s\ (0{,}5)^2 = \frac{V_2}{4} = \underline{5{,}48\ m/s}$$

$$N_{Re} = \frac{V_s D_s}{\nu} = \frac{5{,}48\ m/s \cdot 1\cdot10^{-2}\ m}{10^{-6}\ m^2/s} = \underline{\underline{54772}}$$

c) To kontraksjoner: 1. Flaske → Slange
2. Slange → Dyse

$$K_{C1} = 0{,}55\left(1 - \frac{(1\ cm)^2}{(10\ cm)^2}\right) = 0{,}99\cdot0{,}55$$

$$K_{C2} = 0{,}55\left(1 - \frac{(0{,}5\ cm)^2}{(1\ cm)^2}\right) = 0{,}55\cdot0{,}75 = 0{,}4125$$

Fra formelhefte:

Andre tap: $F = K\cdot\frac{v_{av}^2}{2}$

Bernoulli med tap:

$$\frac{P_1}{\rho} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + K_{C1}\cdot\frac{V_s^2}{2} + K_{C2}\cdot\frac{V_2^2}{2} \quad \Big/ \ V_s = \frac{1}{4}V_2$$

$$\frac{2P_{over}}{\rho} = V_2^2 + \frac{K_{c1}}{16}V_2^2 + K_{c2}\cdot V_2^2$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2P_{over}}{\left(1+\frac{K_{c1}}{16}+K_{c2}\right)\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 240000}{\left(1+\frac{0{,}99\cdot 0{,}55}{16}+0{,}4125\right)\cdot 10^3}} = \underline{\underline{18{,}22\ m/s}}$$

d) Fra formelheftet

Friksjonstap i rør:

$$F = \frac{\Delta p}{\rho} = 4f\,\frac{v_{av}^2}{2}\frac{L}{D}$$

$$f = \frac{0{,}079}{\left(\frac{V_s D_s}{\nu}\right)^{1/4}} = \frac{0{,}079}{\left(\frac{10\cdot 10^{-2}}{10^{-6}}\right)^{1/4}} = \frac{0{,}079}{10^{5/4}}$$

Ny bernoulli

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + K_{c1}\cdot\frac{V_s^2}{2} + K_{c2}\cdot\frac{V_2^2}{2} + 4f\frac{V_s^2}{2}\cdot\frac{L}{D} \quad / V_s = \frac{1}{4}V_2$$

$$\frac{2P_{over}}{\rho} = V_2^2 + \frac{K_{c1}}{16}V_2^2 + K_{c2}\cdot V_2^2 + \frac{1}{4}f\frac{L}{D}V_2^2$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2P_{over}}{\left(1+\frac{K_{c1}}{16}+K_{c2}+\frac{1}{4}f\cdot\frac{L}{D}\right)\rho}} = \underline{17{,}88\ m/s}$$

sett inn tall

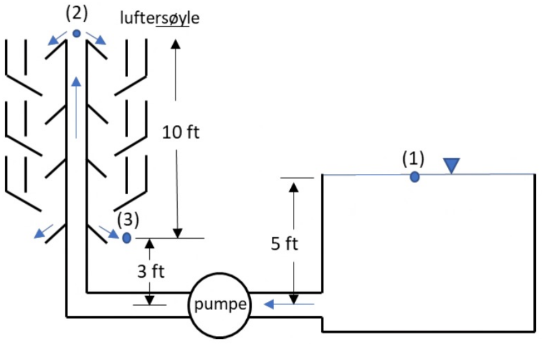
Ganske lavt tap med tanke på hva vi ser på

Batterisyre: større ν → mindre N_{Re} → større f → mindre V_2

Bensin: Motsatt

Oppgave 3

Vann pumpes fra en tank, punkt (1), til toppen av en vannplantestråler, punkt (2), som vist i Fig med en hastighet på 3,0 ft^3/s. (a) Bestem kraften som pumpen legger til vannet hvis hodetapet fra (1) til (2) der $V_2 = 0$ er 4 ft. (b) Bestem hodetapet fra (2) til bunnen av luftakolonnen, punkt (3), hvis gjennomsnittshastigheten på (3) er $V_3 = 2$ ft /s.



Bruk følgende verdier for tetthet = 1000 kg / m^3 og akselerasjon på grunn av tyngdekraften (g) = 9.8 m / s^2. Svaret bør være i form av kraft (W).

Ta akselerasjon på grunn av tyngdekraften som: g = 32.2 ft/s^2.

a) Har at $V_2 = 0$, at $h_L = 4\,ft$ og $q = 3\,ft^3/s$

Bernoulli på (1) og (2) blir da: (deler på g for å bruke h_L direkte)

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + Z_1 + h_p - h_L = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + Z_2$$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$

$V_1 = V_2 = 0$, $V_2 = 0$ gitt i oppgaven

$V_1 = 0$ fordi $A_1 >> A_2 \Rightarrow V_1 \approx 0$

$$Z_1 + h_p - h_L = Z_2$$

$$h_p = Z_2 - Z_1 + h_L = 13\,ft - 5\,ft + 4\,ft$$

$$h_p = 12\,ft = 12\,ft \cdot 0{,}3048\,\frac{m}{ft} = \underline{3{,}66\,m}$$

$$q = 3\,ft^3/s = 3 \cdot \left(0{,}3048\,\frac{m}{ft}\right)^3 \cdot \frac{ft^3}{s} = \underline{0{,}0850\,m^3}$$

$$W = \dot{F} \cdot s = \dot{G} \cdot s = \rho g Q \cdot h_p = 1000\,kg/m^3 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 0{,}0850\,m^3 \cdot 3{,}66\,m$$

$$\underline{\underline{\dot{W} = 3048{,}8\,W}}$$

b) Bernoulli, (2)→(3), ved (3), vann ut i atmosfære $\Rightarrow P_2 = P_3 = P_{atm}$

$$\cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}}^{\,V_2 = 0} + Z_2 - h_L = \cancel{\frac{P_3}{\rho g}} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_1$$

$$h_L = (Z_2 - Z_1) - \frac{V_3^2}{2g} = 10\,ft - \frac{(2\,ft/s)^2}{2 \cdot 32{,}2\,ft/s^2} = 9{,}94\,ft = \underline{\underline{3{,}03\,m}}$$