Øving 4

Oppgave 1

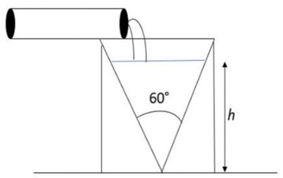
Vann strømmer fra røret med en diameter på 50 mm med en gjennomsnittlig hastighet på 6 m / s som vist på figur 1 ($\rho = 1000\ kg/m^3$ og $\mu = 0.001$ Pa-s). Beholderen er 1 m lang (L = 1 m). Er strømningen laminær?

$$N_{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000\ kg/m^{\cancel{3}} \cdot 6\ \cancel{m}/s \cdot 50 \cdot 10^{-3}\ \cancel{m}}{0{,}001\ Pa \cdot s} = \underline{\underline{3 \cdot 10^5 > 4000 \Rightarrow \text{Turbulent}}}$$

$$\left[\frac{kg/m \cdot s}{Pa \cdot s} = \frac{\cancel{kg/m \cdot s}}{\cancel{\frac{kg}{m \cdot s^2}} \cdot \cancel{s}} = 1 \right]$$

Oppgave 2

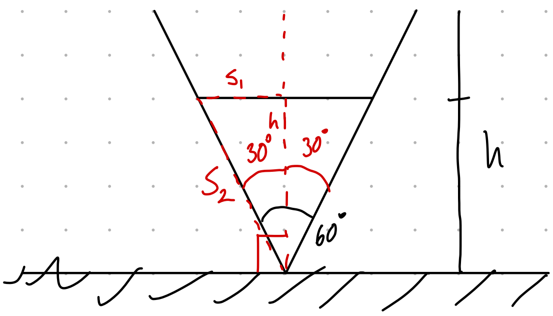
Vann strømmer fra røret med en diameter på 50 mm med en gjennomsnittlig hastighet på 6 m / s som vist på figur ($\rho = 1000\ kg/m^3$ og $\mu = 0.001$ Pa-s). Beholderen er 1 m lang (L = 1 m). Beregne kinematisk viskositet (m^2/s)



$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}001\ Pa \cdot s}{1000\ kg/m^3} = \underline{\underline{10^{-6}\ m^2/s}}$$

Bestem hastigheten som vann stiger i den trekantede beholderen når t = 10 s, hvis ved t = 0 s, h = 0.1 m.

Antar at trekanten egentlig er "vinkelrett" på underlaget



h = lengste katet i trekanten

$$A_{beholder} = 2 \cdot A_{trekanter} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot h = s_1 \cdot h = h^2 \tan 30°$$

$$\tan 30° = \frac{s_1}{h} \Rightarrow s_1 = h \cdot \tan 30°$$

$$V = A \cdot L = h^2 \tan 30° \cdot L$$

(teknisk sett er den overflaten av vannet / grensen til CV som er CS)

Velger utgangen av røret som "CS", og karet som CV, kontinuitetslikningen:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dV}_{1} + \underbrace{\int_S \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, ds}_{2} = 0$$

2. $\int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = -\dot{m}_{in} = -\rho \cdot u \cdot A$

1. (Antar inkompressibel)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \int_V dV\right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho V = \frac{\partial}{\partial t} \rho h^2 \tan 30° \cdot L$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho h^2 \tan 30^\circ \cdot L\right) - \rho u A = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho h^2 \tan 30^\circ L\right) = \rho u A \quad / \text{Integrerer, deler på } \rho$$

$$\rho h^2 \tan 30^\circ \cdot L = \rho u A \cdot t + C_2 \quad / \quad C_2 = \frac{C_1}{\rho}$$

ved $t=0$, $h=0,1$

$$\Rightarrow 0{,}01 \cdot \tan 30^\circ \cdot L = C_2 \Rightarrow C_2 = 0{,}01 \cdot \tan 30^\circ \cdot L$$

$$h^2 \tan 30^\circ \cdot L = uA \cdot t + 0{,}01 \cdot \tan 30^\circ \cdot L$$

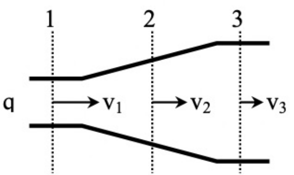
$$h^2 = \frac{uA \cdot t}{\tan 30^\circ \cdot L} + 0{,}01$$

$$h(t) = \sqrt{\frac{uA}{\tan 30^\circ \cdot L}\, t + 0{,}01}$$

$$h'(t) = \frac{uA}{\tan 30^\circ \cdot L} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{uA}{\tan 30^\circ \cdot L} \cdot t + 0{,}01\right)^{-1/2}$$

$$\frac{uA}{\tan 30^\circ \cdot L} = \frac{6\,\text{m/s} \cdot \left(\frac{50 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{2}\right)^2 \cdot \pi}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1\,\text{m}} \approx 0{,}02\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$h'(10) = \frac{0{,}02\ \text{m}^2/\text{s} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{0{,}02\ \text{m}^2/\text{s} \cdot 10\,\text{s} + 0{,}01\,\text{m}^2}} = \underline{\underline{0{,}022\ \text{m/s}}}$$



Finn gjennomsnittshastighetene v_1, v_2 og v_3 i røret til venstre. Volumstrømmen q = 800 liter/min og snittene 1, 2 og 3 har diametre på 50, 60 og 100 mm.

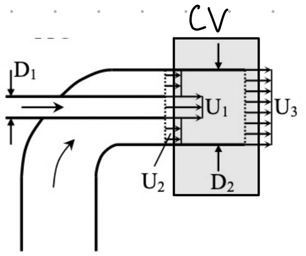
$$q = V \cdot A = V \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{4q}{\pi D^2}$$

$$V_1 = \frac{4 \cdot 800\, \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{m}^3}{1000\,\text{dm}^3}\ \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}}{\pi \cdot \left(50 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\right)^2} = \underline{\underline{6{,}79\ \text{m/s}}}$$

$$V_1 = \frac{4 \cdot 800\, \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{m}^3}{1000\,\text{dm}^3}\ \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}}{\pi \cdot \left(60 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\right)^2} = \underline{\underline{4{,}72\ \text{m/s}}}$$

$$V_1 = \frac{4 \cdot 800\, \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{m}^3}{1000\,\text{dm}^3}\ \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}}{\pi \cdot \left(100 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}70\ \text{m/s}}}$$



En jet-pumpe injiserer vann med hastighet $U_1 = 40$ m/s gjennom et rør med diameter $D_1 = 3$ tommer inn i et rør med diameter $D_2 = 10$ tommer der vannhastigheten $U_2 = 3$ m/s (i det annulære mellomrommet). Et stykke ned i røret har de to strømmene blandet seg sammen.

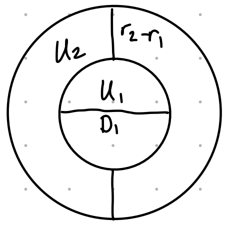
Finn gjennomsnittshastigheten U_3.

(Fasit: 6.33 m/s)

Antar steady state og inkompressibel

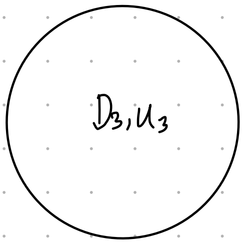
$$\Rightarrow \oiint_A \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dA = 0$$

A inn :



eller: $q_{inn} - q_{ut} = 0$

A ut :



$$A_1 = \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} D_1^2$$

$$A_2 = \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(D_2^2 - D_1^2\right)$$

$$A_3 = \pi \left(\frac{D_3}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} D_3^2 = D_2^2$$

$$q_i = U_i \cdot A_i$$

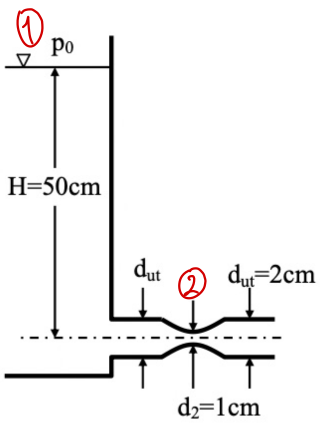
$$q_{inn} - q_{ut} = 0 \Rightarrow U_1 \cancel{\frac{\pi}{4}} D_1^2 + U_2 \cancel{\frac{\pi}{4}} \left(D_2^2 - D_1^2\right) - U_3 \cancel{\frac{\pi}{4}} D_2^2 = 0$$

$$U_3 = U_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} + U_2 \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)$$

$$U_3 = 40 m/s \ \frac{3^2}{10^2} + 3 m/s \left(1 - \frac{3^2}{10^2}\right)$$

$$\underline{U_3 = 6{,}33 \ m/s}$$

Vann strømmer friksjonsfritt ut i atmosfæren gjennom et utløpsrør med diameter d_{ut}. Høyden H i karet holdes konstant.



a) Utløpsrøret har en innsnevring d_2. Finn trykket i innsnevringen.

Fasit: 28KPa

b) Finn den minste diameteren d_2 kan ha før strømningen *kaviterer* (= koker pga. strømningsforhold).

a) Bernoulli, toppen av vannspeilet og utløpet

$$\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{\rho}} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{\cancel{P_{ut}}}{\cancel{\rho}} + \frac{V_{ut}^2}{2} + gz_{ut}$$

Har $z_1 = H$, $z_{ut} = 0$, $P_1 = P_{ut} = P_{atm}$, $V_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{V_{ut}^2}{2} = g \cdot H$$

$$\underline{V_{ut} = \sqrt{2gH}}$$

Fra massebevarelse: $q_{innsnevring} = q_{ut}$

$$V_2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2 = V_{ut} \cdot \frac{\pi}{4} d_{ut}^2$$

$$V_2 = V_{ut} \cdot \left(\frac{d_{ut}}{d_2}\right)^2 = V_{ut} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4V_{ut}$$

Ny bernoulli → innsnevring, utløp, $z_2 = z_{ut} = 0$

$$\frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_{ut}^2}{2}$$

$$P_2 = P_a + \frac{\rho}{2}(V_{ut}^2 - V_2^2)$$

$$= P_a + \frac{\rho}{2}(V_{ut}^2 - 16V_{ut}^2)$$

$$= P_a - 15\frac{\rho}{2}V_{ut}^2$$

$$= P_a - 15\frac{\rho}{2} \cdot 2gH$$

$$= 1{,}01 \cdot 10^5\ Pa - 15 \cdot \frac{998\ kg/m^3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 50 \cdot 10^{-2}\ m$$

$$\underline{\underline{P_2 = 27572\ Pa}}$$

b) Kavitasjon skjer når trykket er negativt $P_2 < 0$

$\Rightarrow$ Fra $P_2 = P_a + \frac{\rho}{2}(V_{ut}^2 - V_2^2) = 0$, La $\alpha = \frac{D_{ut}}{D_2}$

$$P_a + \frac{\rho}{2}(1 - \alpha^4)V_{ut}^2 = 0$$

$$(\alpha^4 - 1) = \frac{2P_a}{\rho V_{ut}^2} = \frac{\cancel{2} \cdot P_a}{\rho \cancel{2} gH} = \frac{P_a}{\rho g H}$$

$$\alpha = \frac{D_{ut}}{D_2} = \left[\frac{P_a}{\rho g H} + 1\right]^{-1/4} \Rightarrow D_2 = D_{ut}\left[\frac{P_a}{\rho g H} + 1\right]^{-1/4} = 2 \cdot 10^{-2}\ m \left[\frac{1{,}01 \cdot 10^5\ Pa}{998\ kg/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 50 \cdot 10^{-2}\ m} + 1\right]^{-1/4}$$

$$\underline{\underline{D_2 = 0{,}00927\ m}}$$