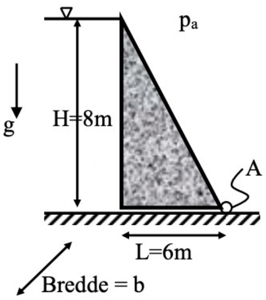
Øving 3

Oppgave 1



En demning sperrer vann med konstant tetthet ρ_{VANN}. Demningen har høyde H, lengde L og en bredde b inn i papirplanet. Den er bygd av sement med *relativ tetthet* SG (= $\rho_{SEMENT} / \rho_{VANN}$).

Vi skal finne SG slik at demningen ikke tipper. Da må vi sjekke *momentet* (= kraft · arm) om punkt A. I oppgaven kan vi regne med *overtrykket* ("gage pressure"), fordi atmosfæretrykket gir ikke noen netto-kraft på demningen.

a) Vis at SG = 8/9 er grenseverdien før tipping.
b) Vann har sivet inn under demningen! Vis at SG = 43/18.

a) Trykket av vann som funksjon av dybde: $p(h) = p_a + \rho_w g h$

Vi har atmosfæretrykk på begge sider: $\rho_w g h$

Trykkraften på demningen blir: $F = \int_0^H \rho_w g h \cdot b \cdot dh = \rho_w g \frac{H^2}{2} b = \frac{1}{2} \rho_w g b H^2$

Tyngdepunktet til trekanter er ved $\frac{h}{3}$ => F "angriper" ved $\frac{H}{3}$

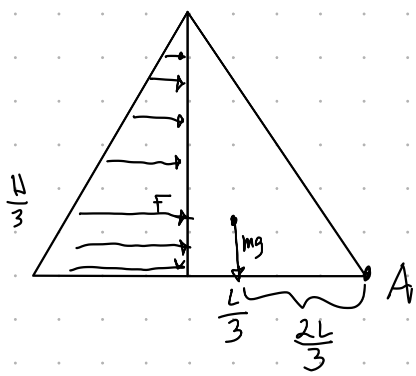
Vekten av demningen: $mg = \rho_{sement} \cdot V_{demning} \cdot g = \rho_{sement} \cdot \frac{1}{2} L H b g = SG \cdot \rho_w \frac{1}{2} L H b g$

$V_{demning} = \frac{L \cdot H \cdot b}{2}$, $SG = \frac{\rho_{sement}}{\rho_w} \Rightarrow \rho_{sement} = SG \cdot \rho_w$

Tyngdepunktet i lengderetning blir ved $\frac{L}{3}$ => Tyngden "angriper der"

Demningen står i ro => $\tau_A = 0$

$\tau_A = \text{kraft} \cdot \text{arm}$



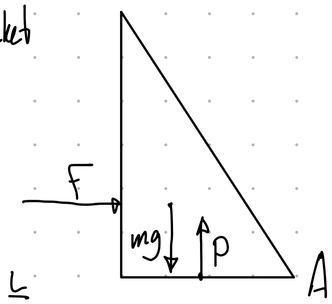
$\Rightarrow \frac{H}{3} F_{trykk} - \frac{2L}{3} mg = 0 \quad / \cdot 3$

$H \cdot F_{trykk} = 2L \cdot mg$

$\cancel{H} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{\rho_w} \cancel{g} \cancel{b} \cdot H^2 = 2L \cdot SG \cancel{\rho_w} \cancel{\tfrac{1}{2}} L \cdot \cancel{H} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{g}$

$$\Rightarrow SG = \frac{H^2}{2L^2} = \frac{8^2}{2 \cdot 6^2} = \frac{8}{9}$$

b) Får en ekstra kraft under demningen, siden trykket er konstant (ingen høyde forskjell) $= \rho_w g H$, vil den "angripe" på midten av bunnfladen, kraften blir $P =$ trykk · areal $= \rho_w g H \cdot b \cdot L$, "angriper" ved $\frac{L}{2}$



$$\tau_A = 0$$

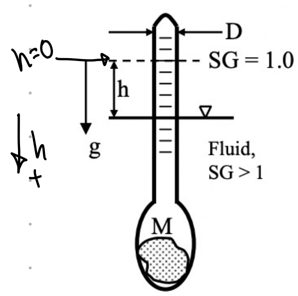
$$\Rightarrow \frac{H}{3} F + \frac{L}{2} P - \frac{2L}{3} mg = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2L}{3} SG \cdot \cancel{\rho_w} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} L \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{H} \cdot \cancel{g} = \frac{\cancel{H}}{3} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{\rho_w} \cancel{g} \cancel{b} H^2 + \frac{L}{\cancel{2}} \cancel{\rho_w} \cancel{g} \cancel{H} \cancel{b} \cdot L$$

$$\frac{2L^2}{3} SG = \frac{H^2}{3} + L^2$$

$$\underline{\underline{SG = \frac{H^2}{2L^2} + \frac{3}{2} = \frac{43}{18}}}$$

Oppgave 2



Hydrometeret brukes som en enkel tetthetsmåler. Stammen har en konstant diameter D, og massen M er (stort sett) lokalisert i bunnen slik at den flyter stabilt i vertikal-retning som vist. Hvis posisjonen $h = 0$ er måling i vann ($SG = 1.0$), vis at h ved måling i en eller annen væske med ukjent SG blir:

$$h = \frac{4M}{\rho_{VANN} \pi D^2}\left(1 - \frac{1}{SG}\right)$$

Tyngden av M må være lik oppdriftskraften fra væsken = tyngden av fluidet som ble presset opp. ($\rho g \Delta h$)

La V_0 = volum av vann presset opp, hvis V er volum fluid presset opp, er

$$V = V_0 - h \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Kraftbalanse gir da at: Fluid:

$$Mg = \rho_{fluid} \cdot g \cdot V = \rho_{fluid} \cdot g \cdot \left(V_0 - h \pi \frac{D^2}{4}\right)$$

Vann: $Mg = \rho_w \cdot g \cdot V_0$

$$Mg = Mg$$

$$\Rightarrow \rho_w \cancel{g} \cdot V_0 = \rho_{fluid} \cdot \cancel{g} \left(V_0 - h\pi D^2/4\right)$$

$$SG = \rho/\rho_w$$

$$\Rightarrow \rho_w/\rho = \frac{1}{SG}$$

$$V_0 - h\pi D^2/4 = \frac{V_0}{SG}$$

$$h\pi D^2/4 = V_0\left(1 - \frac{1}{SG}\right)$$

$$M\cancel{g} = \rho_w \cancel{g} \cdot V_0$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{M}{\rho_w}$$

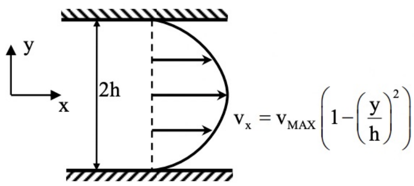
$$h = \frac{4V_0}{\pi D^2}\left(1 - \frac{1}{SG}\right)$$

$$h = \frac{4M}{\rho_w \pi D^2}\left(1 - \frac{1}{SG}\right)$$

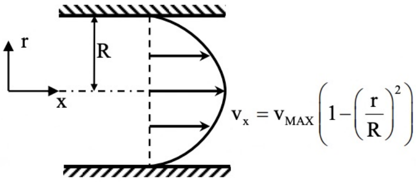
Oppgave 3

Finn *volumstrømmen* q, *gjennomsnittshastigheten* v_{av} , *massestrømmen* $\dot{m}$ og *skjærspenningen* τ_{yx} ved veggen for de to tilfellene under.

Strømning mellom to plater:



Rørstrømning: (radius R)



(bredde b inn i papirplanet)

(Fasit: $v_{MAX} / v_{av} = 3/2$ og $v_{MAX} / v_{av} = 2$)

Tilfelle 1: To plater

$$q = \iint_A \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dA, \quad V_x \text{ er vinkelrett på } A \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = V_x$$

$$q = \int_{-h}^{h} \int_0^b V_x \, db \cdot dy = b \int_{-h}^{h} V_{max}\left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right) dy$$

$$= b V_{max} \int_{-h}^{h} 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 dy = b V_{max} \left[h - \frac{y^3}{3h^2}\right]_{-h}^{h}$$

$$= b V_{max}\left(h - \frac{h^{\cancel{3}}}{\cancel{h^2}} - \left(-h + \frac{h^{\cancel{3}}}{3\cancel{h^2}}\right)\right)$$

$$= b V_{max}\left(h - \frac{h}{3} + h - \frac{h}{3}\right)$$

$$q = \frac{4}{3} b V_{max} h$$

$$V_{AVG} = \frac{q}{A_{crss}} = \frac{\frac{4}{3}\cancel{b} \cdot V_{max} \cdot \cancel{h}}{\cancel{b} \cdot 2\cancel{h}} = \frac{2}{3} V_{max}$$

Massestrøm:

Hvis ρ = konstant

$$\underline{\underline{\dot{m} = \rho \cdot q = \frac{4}{3}\rho b V_{max} h}}$$

Hvis $\rho \neq$ konstant

$$\underline{\underline{\dot{m} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA}}$$

Skjærspenning

Newtons friksjonslov:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = -\mu \left(-2 \cdot \frac{y}{h} \cdot \frac{1}{h}\right) V_{max} = 2 \frac{\mu y}{h^2} V_{max}$$

Ved veggen, $y = h$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = 2\frac{\mu}{h} V_{max}}}$$

Tilfelle 2: For rør

$$q = \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA$$, V_x er vinkelrett på A $\Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = V_x$

$dA \rightarrow$ polarkoordinater $\Rightarrow dA = r\, d\theta\, dr$

$$q = \int_0^R \int_0^{2\pi} V_x\, r\, d\theta\, dr = 2\pi V_{max} \int_0^R r\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = 2\pi V_{max} \int_0^R r - \frac{r^3}{R^2}\, dr$$

$$= 2\pi V_{max}\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\right]_0^R = 2\pi V_{max}\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2\right) = \cancel{2}\pi V_{max} \frac{1}{\cancel{4}_2} R^2$$

$$\underline{\underline{q = \frac{1}{2}\pi R^2 V_{max}}}$$

$$\underline{\underline{V_{AVG} = \frac{q}{A_{crss}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{\pi R^2} V_{max}}{\cancel{\pi R^2}} = \frac{1}{2} V_{max}}}$$

Massestrøm:

Hvis ρ = konstant

$$\underline{\underline{\dot{m} = \rho \cdot q = \frac{1}{2}\rho \pi R^2 V_{max}}}$$

Hvis $\rho \neq$ konstant

$$\underline{\underline{\dot{m} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA}}$$

Skjærspenning

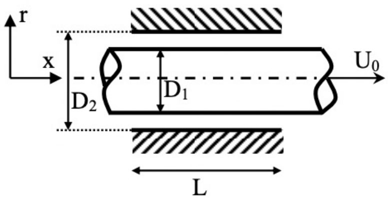
Newtons friksjonslov:

$$\tau_x = -\mu \frac{dv_x}{dr} = -\mu\left(-2 \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{R}\right) V_{max} = 2 \frac{\mu r}{R^2} V_{max}$$

Ved veggen, $r = R$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = 2 \frac{\mu}{R} V_{max}}}$$

Oppgave 4



Et massivt rør med diameteter D_1 = 122 mm er plassert inne i en konsentrisk sylinder med indre diameter D_2 = 125 mm og lengde L = 200 mm. Det er olje med *kinematisk viskositet* ν = 30 cSt og *relativ tetthet* SG = 0.9 i gapet mellom røret og sylinderen. Finn kraften som skal til for å bevege røret med en hastighet U_0 = 1 m/s idet vi antar at oljens hastighet varierer *lineært* i gapet.

Fasit: 1.38 N eller 1.41 N

Antar linear hastighetsfordeling: $u(y) = U_0 \cdot \frac{y}{h}$, h = avstand rørvegg til syllinder

$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dy} = -\mu\, U_0 \cdot \frac{1}{h} = -\mu \frac{U_0}{h}$$

$$|\tau| = \mu \frac{U_0}{h}$$

$$\mu = \nu \cdot \rho_{olje} = \underbrace{30\,\mathrm{sCt}}_{= 30 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}\, m^2/s \,=\, 30 \cdot 10^{-6}\, m^2/s} \cdot SG \cdot \rho_w \quad , \rho_w = 998\ kg/m^3$$

$$F = \tau \cdot Areal = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L$$

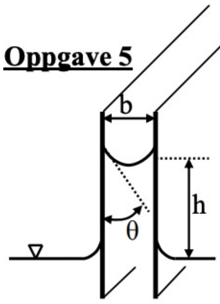
$$= \mu \frac{U_0}{h} \cdot \pi \cdot D \cdot L$$

$$= \nu \cdot SG \cdot \rho_w \cdot \frac{U_0}{h} \cdot \pi \cdot D \cdot L$$

$$= 30 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \cdot 0{,}9 \cdot 998\ kg/m^3 \cdot \frac{1\ m/s}{\left(\frac{125}{2} - \frac{122}{2}\right) \cdot 10^{-3}\ m} \cdot \pi \cdot 122 \cdot 10^{-3}\ m \cdot 200 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$\underline{\underline{= 1{,}38\,N}}$$

Oppgave 5



To glassplater er plassert vertikalt ned i vann som vist i figuren til venstre. Avstanden mellom platene er b, og kapillæreffekten løfter vannet opp en høyde h.

Kontaktvinkel $\theta \approx 0$, Overflatespenning $T = 0.0728$ N/m.
Bruk $\rho = 998$ kg/m^3 og $g = 9.81$ m/s^2.

Finn et uttrykk for h. (For tilfellet b = 1 mm blir h = 0.0149 m)

Volum hevet vann: $b \cdot h \cdot L$

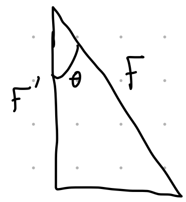
Tyngde: $mg = \rho \cdot b \cdot h \cdot L \cdot g$

Google:

$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{L} \Rightarrow F = 2 \cdot T \cdot L$, siden vi her en vinkel, vil

$$F' = F \cdot \cos\theta$$

$\Rightarrow F' = 2 \cdot T \cdot L \cdot \cos\theta$



$\cos\theta = \frac{F'}{F}$

$\Rightarrow F' = \cos\theta \cdot F$

Newtons 2. lov

$\rho b \cdot h \cdot \cancel{L} g = 2T\cancel{L} \cdot \cos\theta$ (b = 1 mm, fra "fasit")

$$h = \frac{2T\cos\theta}{\rho b g} \approx \frac{2 \cdot 0{,}0728\ \text{N/m} \cdot \cos 0}{998 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}0149\,\text{m}$$

$$\underline{\underline{h \approx 0{,}0149\ \text{m}}}$$