Øving 2

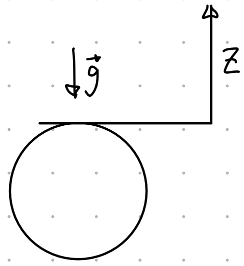
Oppgave 1

Betrakt jordens atmosfære som en ideell gass, og anta at temperaturen faller som

$$T(z) = T_0 - \alpha z$$

fra jordens overflate. Bestem trykket som funksjon av høyden z, når trykkets verdi ved jordoverflaten er p_0. Hvor høyt opp kan du bruke svaret ditt ?

Tallverdier: $\alpha = 0.006\ \mathrm{K/m}$



Statikkens grunnlikning: $-\nabla p + \rho \vec{g} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \vec{k} = 0 \quad / \vec{g} = -\vec{k} \cdot g$

ser på z-retning

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g}$$

Ideell gasslov $\quad pV = nRT \qquad \rho = \frac{n}{V}$

$$\boxed{\rho = \frac{p}{RT}}$$

Kombinerer: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{pg}{RT}$

Setter inn likningen for temperaturen:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{R} \frac{p}{T_0 - \alpha z}$$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R} \frac{\partial z}{T_0 - \alpha z} \qquad / \text{integrerer } p_0 \to p,\ z = 0 \to z = z$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \cancel{-}\frac{g}{R}\Big[\underbrace{\ln(T_0 - \alpha z)}_{\substack{T>0 \\ (\text{Kelvin})}} \cdot \frac{1}{\cancel{-}\alpha}\Big]_0^z$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{R\alpha}\left(\ln(T_0 - \alpha z) - \ln(T_0)\right) \qquad / \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{R\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}} \qquad / e^{n}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$$

$$\underline{\underline{P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{g/R\alpha}}}$$

Negativt trykk gir ikke mening (i atmosfæren)

$\Rightarrow$ Kan ikke bruke uttrykket når $1 - \frac{\alpha z}{T_0} < 0$

$$\frac{\alpha z}{T_0} > 1$$

LF bruker 300K

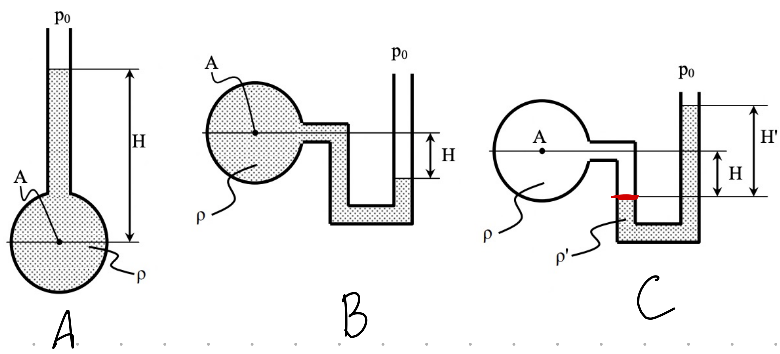
Ugyldig når: $z > \frac{T_0}{\alpha} = \frac{298\,K}{0{,}006\,K/m} = 49{,}7\,km$

Antar romtemperatur

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Vi kan bruke svaret når } z \leq 49{,}7\,km}}$

Oppgave 2

Finn trykket **p** i punkt **A** i de tre figurene under.



A: $\underline{\underline{P_A = P_0 + \rho g h}}$ (alt over)

B: Setter opp likevekt ved væskeoverflaten

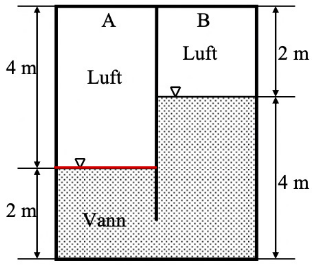
$$P_0 = P_A + \rho g H \Rightarrow \underline{\underline{P_A = P_0 - \rho g h}}$$

C: Likevekt på væskeoverflaten inni røret

$$P_A + \rho g H = P_0 + \rho' g H'$$

$$\underline{\underline{P_A = P_0 + g(\rho H - \rho' H')}}$$

Oppgave 3



En lukket tank har en skillevegg stukket ned i vann slik at vi får to adskilte luftlommer. Trykket i punkt A (helt oppunder toppen i tanken) er målt til 95 kPa (absolutt) og temperaturen i tanken er 20 ˚C.

a) Finn trykket i punkt B.

b) Annta at luft-tettheten kan regnes konstant i de to luftlommene Finn feilen du gjør når du neglisjererer vekten av luften i luftlommene. (Fasit: ca 0.04%)

Tallverdier: $g = 9.81\ m/s^2$, $R_{luft} = 287\ m^2/s^2K$. ρ_{vann}: A2 i Geankoplis.

a) $\rho_W = 998\ kg/m^3$

$\rho_{luft} = \rho_L$ varierer med trykket, ideell gasslov: $\rho_L = \frac{P}{R_{luft} \cdot T}$

Likevekt ved vannoverflaten i A tanken:

$$P_A + \rho_{L,A} \cdot g \cdot 4m = P_B + \rho_{L,B} \cdot g \cdot 2m + \rho_W g \cdot 2m$$

$$P_A + \frac{P_A}{R_{luft} \cdot T} \cdot g \cdot 4m = P_B + \frac{P_B}{R_{luft}} \cdot g \cdot 2m + \rho_W g\, 2m$$

$$P_A \left(1 + \frac{g \cdot 4m}{R_{luft} \cdot T}\right) = P_B \left(1 + \frac{g\, 2m}{R_{luft} \cdot T}\right) + \rho_W g\, 2m \qquad T = (20 + 273)K = 293K$$

$$P_B = \frac{P_A\left(1 + \frac{g \cdot 4m}{R_{luft} \cdot T}\right) - \rho_W g\, 2m}{1 + \frac{g \cdot 2m}{R_{luft} \cdot T}} = \frac{95\,kPa\left(1 + \frac{9{,}81\ \cancel{m}/s^2 \cdot 4\cancel{m}}{287\ \cancel{m^2}/\cancel{s^2}\cancel{K} \cdot 293K}\right) - 998\ kg/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 2m}{\left(1 + \frac{9{,}81\ \cancel{m}/s^2 \cdot 2\cancel{m}}{287\ \cancel{m^2}/\cancel{s^2}\cancel{K} \cdot 293K}\right)}$$

$$\underline{\underline{P_B = 75446\ Pa}}$$

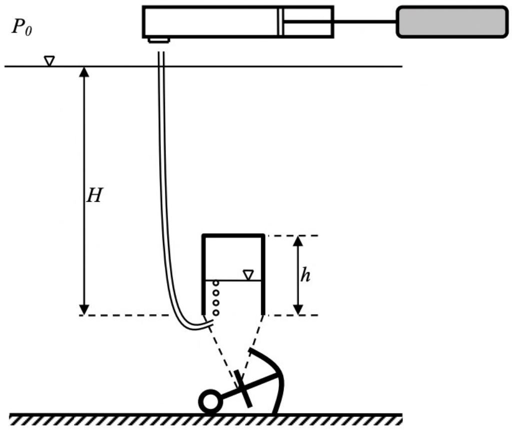
b) Neglisjerer luftvekten: $P_A = P_B' + \rho g 2m$

$$P_B' = 95\,kPa - 998\ kg/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 2m$$

$$P_B' = 75419\ Pa$$

Feilen: $\frac{P_B - P_B'}{P_B} = 0{,}00036 = \underline{\underline{0{,}036\%}} \approx (0{,}04\%)$

Oppgave 4



Et anker med masse $m = 100$ kg skal heves opp fra en vanndybde $H = 30$ m ved å bruke en 200 liters plastikk-tønne som en flottør. Tønnen har en høyde $h = 1$ m, og er festet med åpningen ned til ankeret som vist i figuren. Opprinnelig var tønnen fylt med vann, men ved hjelp av en sykkelpumpe og en slange skal luft presses inn i tønnen. Sykkelpumpen har en indre diameter på 1 tomme (= 2.54 cm). Ankeret er av metall med relativ tetthet $SG = 5$, mens vann har tetthet $\rho = 1000$ kg/m^3. Tyngdens akselerasjon er $g = 10$ m/s^2 og atmosfæretrykket er $P_0 = 10^5$ Pa.

a) Regn ut hvor stor kraft man må bruke på sykkelpumpen for å få luft inn i tønnen. (Fasit: 152 N)

b) Regn ut hvor stort volum luft inne i tønna som må til for å løfte ankeret.

a) For å "forskyve" vannet inni pumpa, må trykket i sykkelpumpa være like stort som trykket av vannet ved vannspeilet inne i tønna

$$P_{vannspeil} = P_0 + \rho_w g H$$

Atmosfæretrykket påvirker innsiden og utsiden av pumpa => kanselleres

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P \cdot A = \rho_w g H \cdot \pi r^2 = 1000\,kg/\cancel{m^3} \cdot 10\,\cancel{m}/s^2 \cdot 30m \cdot \pi \cdot \left(\frac{2{,}54 \cdot 10^{-2}\,\cancel{m}}{2}\right)^2$$

$$\underline{\underline{F = 152\ kg\ m/s^2 = 152N}}$$

b) Må likevekt slik at

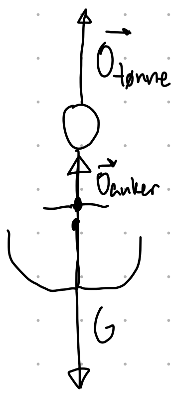
$$m\vec{g} = \vec{G}_{anker} = \underbrace{\vec{O}_{tot}}_{\text{Oppdrift}} = \vec{O}_{tønne} + \vec{O}_{anker}$$

(Antar vektløs tønne)

Buoyancy:

$$\vec{O}_{tønne} = \rho_w g V_{luft}$$

$$\vec{O}_{anker} = \rho_w g V_{anker} = \cancel{\rho_w} g \cdot \frac{m}{\cancel{\rho_w} \cdot SG} = \frac{mg}{SG}$$



$$V_{anker} = \frac{m}{\rho_{anker}}, \quad SG = \frac{\rho_{anker}}{\rho_w}$$

$$\Rightarrow V_{anker} = \frac{m}{\rho_w \cdot SG}$$

$$\Rightarrow \quad m\cancel{g} = \rho_w \cancel{g} V_{luft} + \frac{m\cancel{g}}{SG}$$

$$V_{luft} = \frac{m - m/SG}{\rho_w} = \frac{100 - 100/5}{1000} = 0{,}08\ m^3 = \underline{\underline{80L}}$$