Øving 1

Oppgave 1

Finn hastighet, akselerasjon og partikkelbaner i følgende tre tilfeller:

a) $x = c_1 t^2, \ y = 0$

b) $x = c_2 \cos \omega t, \ y = c_2 \sin \omega t$

c) $x = c_3 e^{at}, \ y = c_3 e^{-at}$

hvor c_1, c_2, c_3, ω og a er konstanter, x og y er kartesiske akser og t er tiden.

a) $V = \frac{dx}{dt} = 2c_1 t \ , \ a = \frac{dv}{dt} = 2c_1$

Partikkelbane: Langs x-aksen => Linja $y = 0$

b)
$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = -C_2 W \sin wt \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = C_2 W \cos wt \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(C_2 W)^2 \underbrace{(\sin^2 wt + \cos^2 wt)}_{=1}} = C_2 W$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = -C_2 W^2 \cos wt \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = -C_2 W^2 \sin wt \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = C_2 W^2$$

Partikkelbane

$$x^2 + y^2 = C_2^2 (\cos^2 wt + \sin^2 wt) = C_2^2$$

=> Sirkel med $r = C_2$, sentrum i origo

c)
$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = C_3 a e^{at} = ax \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = -C_3 a e^{-at} = -ay \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \sqrt{(ax)^2 + (-ay)^2} = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = C_3 a^2 e^{at} = a^2 x \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = C_3 a^2 e^{-at} = a^2 y \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{(a^2x)^2 + (a^2y)^2} = a^2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Partikkelbane: $x \cdot y = C_3^2 \Rightarrow y = \frac{C_3^2}{x}$ => hyperbel, sentrum i origo

Oppgave 2

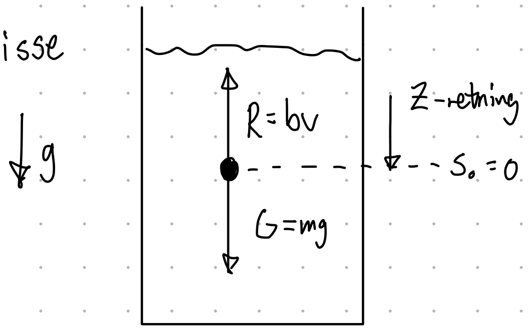
En fast partikkel av masse **m** synker under tyngdens innflytelse i en seig (viskøs) væske og utsettes derved for en motstandskraft **bv**, hvor **b** er en konstant og **v** er partikkelens instantane hastighet. For det tilfellet at partikkelen slippes løs fra ro ved tiden t = 0, bestem:

a) Partikkelens bevegelseslikning med initialbetingelser.

b) Partikkelens hastighet som funksjon av tiden, og vis at denne går mot en endelig grenseverdi $\mathbf{v_g}$ for store **t**.
Skissèr forløpet **v = f(t)**.

c) Partikkelens forskyvning som funksjon av tiden.

Skisse



a) Newtons 2. lov: $ma = R - G$

$$\underline{\underline{ma = mg - bv \;,\quad v>0,\; v=0 \text{ ved } t=0}}$$

b) $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - bv$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \quad / \text{Integrerer}$$

$$\left[\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right)\cdot\left(\frac{1}{-b/m}\right)\right]_{v_0}^{v} = \left[t\right]_{t_0}^{t} \;,\quad v_0 = 0,\; t_0 = 0$$

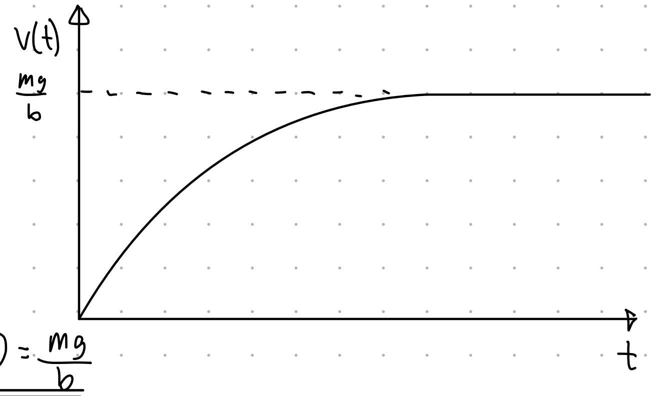
$$-\frac{m}{b}\left(\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) - \ln(g)\right) = t \quad / \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$\ln\left(\frac{g - \frac{b}{m}\cdot v}{g}\right) = -\frac{b}{m}t$$

$$\ln\left(1 - \frac{b}{mg}v\right) = -\frac{b}{m}t$$

$$1 - \frac{b}{mg}v = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}} \;,\quad \underline{\underline{v_g = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{b}(1-0) = \frac{mg}{b}}}$$

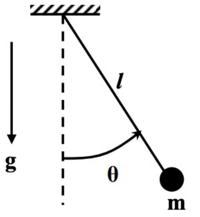


c) $S - S_0 = \int_0^t v(t)\,dt \;,\;$ La $S_0 = 0$

$$S(t) = \frac{mg}{b}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)dt = \frac{mg}{b}\left[t + \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\right]_0^t = \frac{mg}{b}\left(t + \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{mg}{b}\left(t - \frac{m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right)}}$$

Oppgave 3
En matematisk pendel består av et massepunkt **m** opphengt i en masseløs snor av lengde ***l***. Systemet kan bevege seg i vertikalplanet under tyngdens innflytelse.



a) Finn pendelens bevegelseslikning ut fra energibetraktninger.

b) Finn bevegelseslikningen direkte fra Newton's 2. lov.

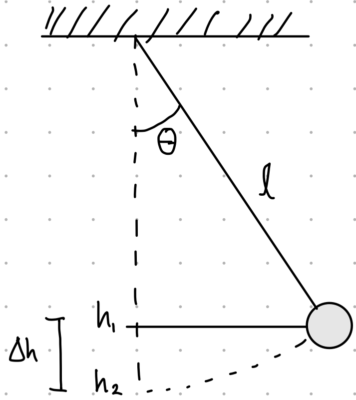
c) Hvilken løsning har bevegelseslikningen for små utslag omkring likevektsstillingen?

a) $h_1 = \cos\theta \cdot l$

$h_2 = l$

Skisse:

$\downarrow$ +h-retning



$E_p = mg\Delta h = mgl(1-\cos\theta)$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$, $v = l\cdot\frac{d\theta}{dt} = l\cdot\dot{\theta}$

($l\cdot\theta$ = lengde på omkrets av sirkel)

$E_k = \frac{1}{2}m\, l^2\dot{\theta}^2$

$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$

Energibevaring:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)\right] = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\cdot l^{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\dot{\theta}}\cdot\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{l}\sin(\theta)\cdot\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

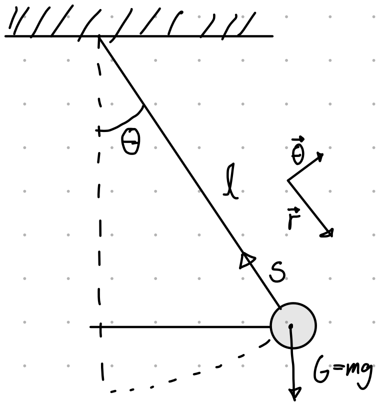
$$l\cdot\ddot{\theta} + g\cdot\sin\theta = 0$$

$$\underline{\underline{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}}$$

b) Newton's 2. lov:

$ma = mg + S$

Skisse:



Dekomponerer (fra forelesning, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$

r-retning : $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - S$ $\quad / \; r = \text{konstant} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$-mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - S$, S er ukjent, prøver θ-retning

θ-retning: $m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\sin\theta$

$\cancel{m}r\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\sin\theta \quad / \; r = l \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}}$

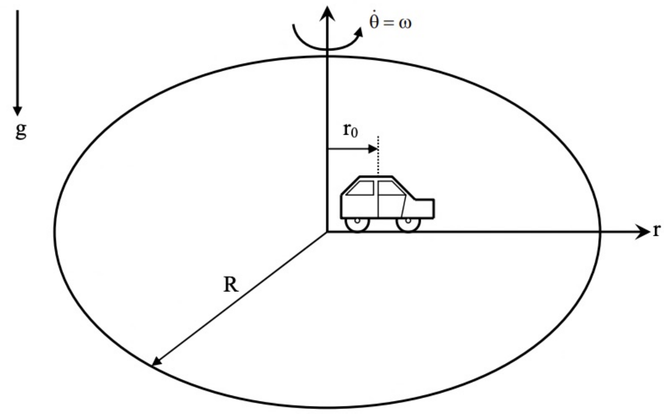
c) For små utslag er $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\theta = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cdot t\right) + B\cdot\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cdot t\right)}}$$

Oppgave 4



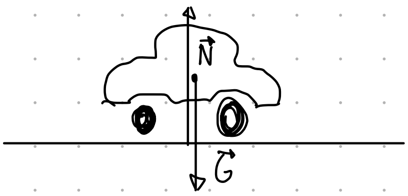
En lekebil står med hjulene i radiell retning på en lp-plate som vist på figuren. Platen roterer med med 33 runder pr. min., og den ligger horisontalt. Bilen har gummihjul, og vil ikke kunne skli sidelengs på platen. Ved tiden t=0 står bilen stille i avstanden r_0 = 1 cm fra senter på platen som har radius R = 15 cm. Anta at bilen triller friksjonsløst i radiell retning.

a) Sett opp Newton's 2.lov (på vektor-form) for bilen.

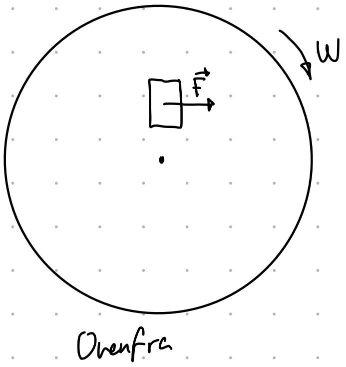
b) Dekomponèr Newton's 2.lov. Hvilken komponent vil du kalle bevegelseslikningen til bilen?
[Ikke løs likningen så sant du ikke har veldig lyst! Fasit: $r(t) = r_0 \cosh(\omega t)$]

c) Hvilke krefter føler bilen under bevegelsen?

a)



Profil



Ovenfra

$\underline{\underline{m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}}}$, G er tyngden, N normalkraft, F er friksjon mellom plata og hjulene

b + c) Som i oppgave 3: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. Vinkelfarten er konstant $\Rightarrow \dot{\theta} = w \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

z-retning: $0 = \vec{G} + \vec{N} = -mg + N$: bilen føler normalkraften (og sin egen tyngde)

θ-retning: $m2\dot{r}w = \vec{F}$: bilen føler friksjonskraften

r-retning: $m(\ddot{r} - rw^2) = 0$: det virker ingen krefter på bilen i denne retningen $\Rightarrow$ bilen vil rulle av plata

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\omega^2 = 0$$

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

$$\Rightarrow r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Trenger betingelser, $t=0 \Rightarrow r = r_0$, $\dot{r} = V_{bil} = 0$

$$\Rightarrow A + B = r_0 \qquad A\cancel{\omega} - B\cancel{\omega} = 0$$

$$A - B = 0$$

$$A = B = \frac{1}{2} r_0 \qquad A = B$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{1}{2} r_0 \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) = r_0 \cdot \cosh(\omega t)$$

$$r(t) = R = 15\text{ cm}$$

$$\Rightarrow \cosh(\omega t) = 15$$

$\omega t = 3{,}4 \leftarrow$ radianer $\quad / \ \omega = 33\text{ rpm} = \frac{33}{60} \cdot 2\pi \frac{\text{radianer}}{s} = 3{,}46 \frac{\text{rad}}{s}$

$$t = \frac{3{,}4}{3{,}46} = 0{,}984\text{ s}$$