Studie av bevegelsen til kule på krum bane.

E. Sørlie[a], S. W. Gravdahl[a], T. Lexow[a], A. B. Sæbø[a]

[a] *Institutt for kjemi, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.*

Sammendrag

I dette forsøket ble det sett på en kule som ruller ned en krum bane. Det ble funnet verdier numerisk og eksperimentelt for blant annet kulens posisjon og hastighet som funksjon av tiden. De eksperimentelle målingene ble funnet ved hjelp av videoanalyseprogrammet Tracker. Sluttfarten til kulen ble numerisk beregnet til å være 1.286 m/s, mens de eksperimentelt ble funnet til å være (1.251 ± 0.013) m/s. Grafer for eksperimentelle og numeriske verdier ble plottet ved hjelp av Python, og sluttfartene ble funnet til å nesten være innenfor to usikkerheter. Det ble konkludert med at de eksperimentelle verdiene stemte godt overens med de numeriske, og at antagelsene gjort i den numeriske modellen var gode.

1. Introduksjon

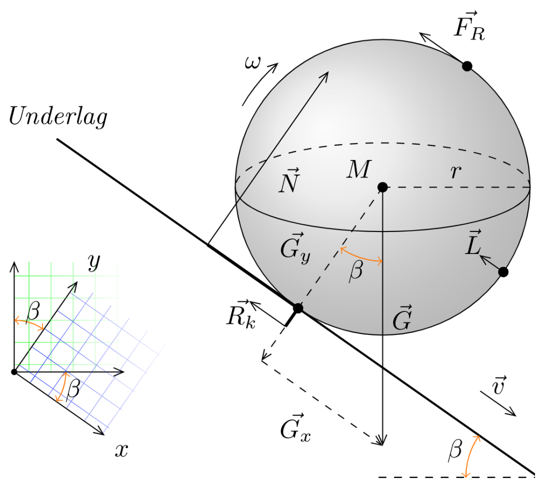
Newtons tre lover er essensielle innen mekanisk fysikk, og de ble presentert av den engelske fysikeren Isaac Newton (1642-1727) [1]. Lovene beskriver hovedsaklig sammenhengen mellom akselerasjon og kraft, og kan brukes til å beskrive objekters bevegelse. Newtons 2. lov ble benyttet i beregningene i dette eksperimentet, men for å inkludere tidsutviklingen, altså fart og posisjon som en funksjon av tiden, ble Eulers metode benyttet. Eulers metode er en numerisk metode for å løse ordinære differensialligninger utviklet av L. Euler, der de numeriske beregningene brukes for å kunne sammenligne eksperimentelle og numeriske verdier [2].

2. Teori

For å beskrive et objekt som ruller ned en krum bane, er det mulig å dele banen inn i mange små delintervaller slik at baneformen innenfor intervallet ligner et skråplan. Dermed kan kreftene som virker på objektet i en gitt posisjon på banen beskrives likt som for ett skråplan, der helningsvinkelen på skråplanet er lik helningsvinkelen på banen i kontaktpunktet mellom banen og objektet. Ved å legge sammen alle skråplanene numerisk blir det mulig å modellere objektets bevegelse på den krumme banen. Figur 1 viser et kraftdiagram for en kule som ruller ned et skråplan.

Newtons 2. lov [1] gir sammenhengen mellom kreftene som virker på et objekt, og akselerasjonen til objektet. Newtons 2. lov er gitt i ligning 1.

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{a} \tag{1}$$



Figur 1: Kraftdiagram for kreftene som virker på en kule som ruller på et skråplan. M er massen til kulen, $\vec{v}$ er farten, β er helningensvinkelen til skråplanet, ω er rotasjonsfarten og r er radiusen til kulen. Videre er $\vec{L}$ luftmotstanden, $\vec{R_k}$ friksjonskraften i form av rullefriksjon, $\vec{F_R}$ rotasjonskraften og $\vec{G}$ gravitasjonskraften. $\vec{G_x}$ er den dekomponerte gravitasjonskraften langs x-aksen som er parallell med fartsretningen og $\vec{G_y}$ er den dekomponerte gravitasjonskraften langs y-aksen, som står normalt på fartsretningen.

Der $\Sigma\vec{F}$ er summen av kreftene, M er massen og $\vec{a}$ er akselerasjonen. For rullende objekt på skråplan er det kun kreftene som er parallelle med fartsretningen som påvirker farten, dermed er det kun $\vec{F_R}$, $\vec{L}$, $\vec{R_k}$ og $\vec{G_x}$ som akselererer objektet direkte.

Uttrykket for luftmotstanden L til et objekt med lav hastighet er proporsjonal med farten. Dersom høydeforskjellene i banen er små, vil objektet få en relativt lav fart, og luftmotstanden blir veldig lav. Hvis banen i tillegg er kort, vil luftmotstanden utføre relativt lite arbeid. Dermed er det rimelig å anta at luftmotstanden ikke utfører arbeid i energiberegninger for korte baner med små høydeforskjeller.

Dersom objektet er tungt i forhold til objektets radius og har høy friksjonskonstant med underlaget, vil det rulle uten å slure. Dermed får objektet rullefriksjon. Dette er en form for hvilefriksjon, slik at friksjonskraften ikke vil utføre noe arbeid.

Et uttrykk for den mekaniske energien, E, til et rullende objekt er gitt i likning 2.

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}cMv^2 \tag{2}$$

Her er M massen og v er farten til objektet. Videre er g tyngens akselerasjon, h er objektets høyde over bestemt nullnivå og c er en konstant som avhenger av objektets fysiske egenskaper. Ved å gjøre antagelsene nevnt over, vil det ikke være kontaktkrefter som utfører arbeid på objektet. Da er energien bevart, slik at den mekaniske energien er like stor før og etter at objektet har rullet ned en bane. Både potensiell og kinetisk energi vil spille inn på den mekaniske energien, der man ender med et uttrykk for energibevarelsen gitt i ligning 3.

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + Mgh_0 + \frac{1}{2}cMv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}cMv^2 \tag{3}$$

I uttrykket for energibevaring er den kinetiske energien viktig for å kunne si noe om hastigheten til et objekt som ruller ned en bane. Den kinetiske energien er uttrykt ved summen av translasjonsenergi og rotasjonsenergi. Dette er vist i ligning 4.

$$K = (1+c)\frac{Mv^2}{2} \tag{4}$$

Leddene $\frac{1}{2}cMv_0^2$ og $\frac{1}{2}cMv^2$ i ligning 3 kommer fra objektets treghetsmoment, dermed vil treghetsmomentet til et objekt spille inn på den mekaniske energien. Derfor er treghetsmomentet interessant for å finne et uttrykk for objektets hastighet langs en bane. Treghetsmomentet til et objekt gir et mål på hvor mye et gitt objekt motsetter seg endring i rotasjonshastighet [3]. Ulike objekter vil ha ulikt treghetsmoment, men generelt er treghetsmomentet gitt som i ligning 5.

$$I_0 = cMR^2 \tag{5}$$

Her er M massen til objektet, mens R er objektets radius. Radiusen, R, er antatt å være mye mindre enn banens krumningsradius. Dermed vil massesenteret til objektet følge krumningen, slik at hastighetsberegninger kan utføres. Videre er c en konstant, og denne vil være ulik for forskjellige objekter. Eksempelvis, dersom det antas uniform massefordeling for en kompakt kule, vil denne konstanten være gitt ved $c = \frac{2}{5}$.

Ved hjelp av energibevarelsen kan farten gitt ved et objekts høyde, h, på en bane uttrykkes. Det antas at objektet starter med en fart $v(y) = 0$, samt at baneformen, $y(x)$, er kjent. Dersom baneformen er bestemt ved et matematisk uttrykk, $y(x)$, der x er den horisontale posisjonen og y den vertikale, kan baneformen brukes til å finne et uttrykk for hastigheten $v(x)$. Dette vises i ligning 6.

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1+c}} \tag{6}$$

For hastighetsuttrykket i ligning 6 brukes antagelsene om at et objekt ruller uten å slure, samt konstant massetetthet for objektet.

For et objekt som ruller ned en bane kan det være interessant å se på krumningen til den gitte banen. Krumningen endres langs baneformen, $y(x)$. Formen kan illustreses ved hjelp av krumningen, κ, da den vil være positiv der banen krummes oppover og negativ der banen krummer ned. Et uttrykk for krumningen er gitt i ligning 7.

$$\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

Krumningen og hastigheten som funksjon av den horisontale posisjonen, kan utnyttes til å finne sentripetalakselerasjonen til et objekt. Sentripetalakselerasjonen er et uttrykk for akselerasjonen inn mot sentrum for et gitt objekt når den beveger seg langs den krumme banen [4]. Sentripetalakselerasjonen er gitt ved ligning 8.

$$a_\perp = v^2\kappa \tag{8}$$

Sentripetalakselerasjonen kan videre brukes til å beregne normalkraft og friksjonskraft som virker på objekter langs en krummet bane. Disse utregningene gjøres ved hjelp av Newtons 2. lov, som virker normalt på banen.

Dersom tyngdekraften, G, som virker på et objekt blir definert til å være i negativ retinging, og man lar normalkraften peke oppover i positiv retning, vil tyngden kunne være gitt ved $G = Mg\cos\beta$, der g er gravitasjonen og β er banens helningsvinkel. Dermed kan normalkraften uttrykkes som i ligning 9.

$$N = M(\cos\beta + a_\perp) \tag{9}$$

I ligning 9 er β ukjent. Helningsvinkelen kan finnes ved å se at når vinkelen er mindre enn null, vil objektet rulle nedover, mens når helningsvinkelen er positiv ruller objektet oppover. β kan da finnes ved at $\tan\beta = \frac{dy}{dx}$, slik at helningsvinkelen er gitt som i ligning 10.

$$\beta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{10}$$

Fra figur 1 kan det observeres at kreftene som virker tangentielt på et objekt som ruller ned en bane er friksjonskraften (R_k) og tangentialkomponenten til tyngden. Denne tangentialkomponenten er gitt ved $-Mg\sin\beta$. Fra Newtons 2. lov kan da uttrykket gitt i ligning 11 finnes.

$$-Mg\sin\beta + R_k = Ma \tag{11}$$

Videre utnyttes Newtons 2. lov for rotasjon, samt uttrykket gitt i ligning 11, for å finne et nytt uttrykk for friksjonskraften, som er gitt i ligning 12.

$$R_k = \frac{cMg\sin\beta}{1+c} \tag{12}$$

I et forsøk der det gjøres eksperimentelle målinger, vil usikkerhet være uunngåelig. Blant annet vil det være usikkerhet ved måling av lengder og avrundinger som spiller inn på resultatene. Det er derfor viktig å undersøke hvor stor usikkerhet som ligger i målingene, for å ha et mål på presisjonen av resultatene. For å beregne usikkerheten, begynner man med å finne en standardfeil. Dette gjøres ved å benytte et gjennomsnitt, som gitt i ligning 13, der N er antall målinger og x er verdiene man ønsker å finne gjennomsnittet av.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{13}$$

Videre beregnes standardavviket. Dette er et mål på hvor mye verdiene i gjennomsnitt avviker fra den mest sannsynlige verdien, og beregnes etter ligning 14.

$$\sigma x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{14}$$

Det er standardavviket som da benyttes til å finne standardfeilen, som er gitt ved ligning 15.

$$\sigma\bar{x} = \frac{\sigma x}{\sqrt{N}} \tag{15}$$

I tillegg til den beregnede standardfeilen vil det også være flere kilder til usikkerhet. Dette kan blant annet være definisjonsusikkerhet (usikkerhet i definisjonen av hva som skal måles og antagelser som er gjort) og systematiske feil (for eksempel feil ved måleinstrumenter).

3. Metode

En krummet bane ble generert ved hjelp av funksjonen cubicspline.py i Python. De numeriske verdiene for en kules hastighet og banens krumning ble beregnet som en funksjon av horisontal posisjon og akselerasjon.

For å gjøre numeriske beregninger av kulens fart og akselerasjon, ble en variant av Eulers metode brukt til å finne tidsutviklingen [2], i kombinasjon med formlene i teoridelen. Det vil ved hjelp av denne metoden være mulig å beregne tiden, Δt_n, som det vil ta et objekt å rulle på et intervall fra x_{n-1} til x_n, numerisk. Objektets horisontale fart på slutten av intervallet (ved posisjonen x_n) er da gitt ved ligning 16, der v_n er hastigheten i et punkt (x_n, y_n) og β_n er helningsvinkelen til banen i det samme punktet.

$$v_{x,n} = v_n cos\beta_n \tag{16}$$

Når den horisontale hastigheten i x_n så er kjent, kan det finnes en tilnærming for den gjennomsnittelige, horistonale farten langs hele intervallet, gitt i ligning 17.

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2}(v_{x,n-1} + v_{x,n}) \tag{17}$$

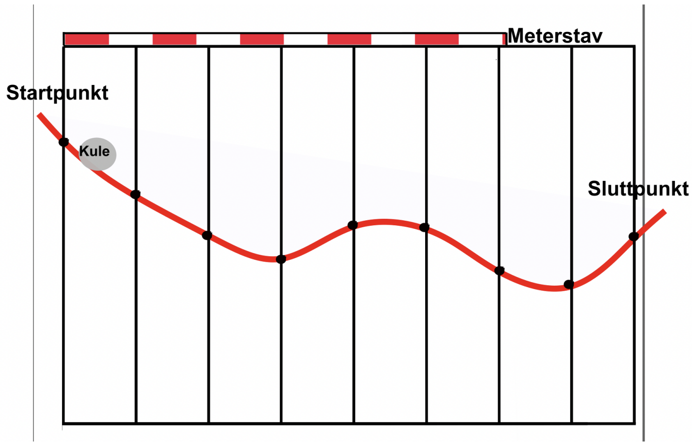
Videre kan dette uttrykket brukes til å finne tiden objektet bruker langs hele intervallet, Δt_n. Dette er gitt i ligning 18.

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n} \tag{18}$$

I de numeriske beregningene ble kulens radius, som oppgitt i tabell 1, benyttet til å beregne kulens treghetsmoment etter ligning 5.

Ut i fra banen som ble generert i Python, ble en tilnærmet lik bane satt opp for å videre finne eksperimentelle verdier. Oppsettet er som vist i figur 2. En kule som presentert i tabell 1 ble sluppet fra banens startpunkt og observert fram til den passerte siste festepunkt. Gjennomføringene ble filmet og ballens bane ble deretter sporet i videoanalyseprogrammet Tracker for å hente ut posisjon, tid, og fart. Dette ble gjort 10 ganger. Dataen fra gjennomføringene ble plottet mot den numeriske modellen ved hjelp av python. Til slutt ble det gjort en analyse av sluttfarten til kulen.

Fra de ti utførelsene av eksperimentet ble gjennomsnittlig sluttfart beregnet og sammenliknet med sluttfarten fra den numeriske modellen.



Figur 2: Utstyrsoppsett for eksperimentet. Figuren viser en krummet plastikkbane med lav helningsvinkel. Banen ble laget ved å stille inn høyden på festepunktene. En kule slippes fra startpunktet, og det ses bort fra sluring. Meterstaven ligger synlig i videobildet for gjennomføring av analyse.

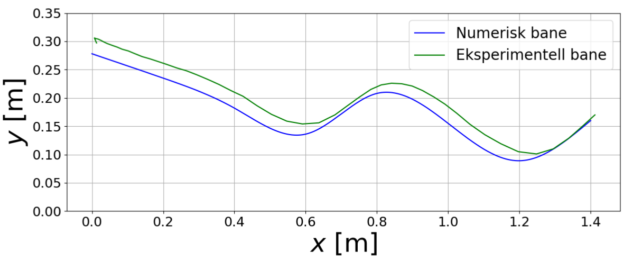
4. Resultater

Den numeriske sluttfarten til kulen ble funnet til å være 1.286 m/s. Videre ble gjennomsnittsverdien til sluttfarten funnet eksperimentelt til å være (1.251 ± 0.013) m/s, der usikkerheten er beregnet ved hjelp av metoden beskrevet i ligning 13, 14 og 15. Kulens fysiske verdier som ble benyttet til å finne de numeriske verdiene presentert i tabell 1.

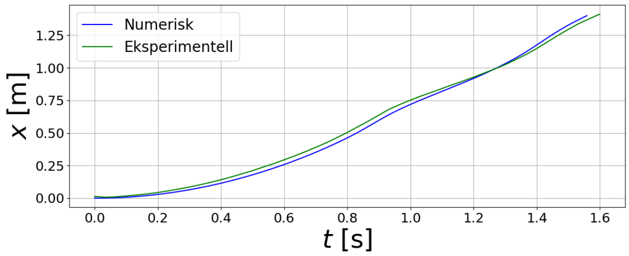
Tabell 1: Fysiske verdier for kulen brukt i forsøket

Objekt	Masse [g]	Radius [cm]
Kule	29.7 ± 0.1	1.0 ± 0.1

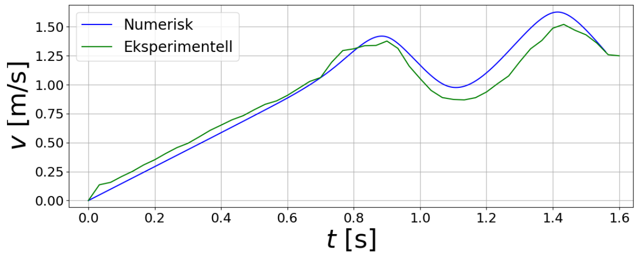
De fire plottene som ble laget for å beskrive og sammenligne numeriske og eksperimentelle verdier er presentert i figur 3, 4, 5 og 6.



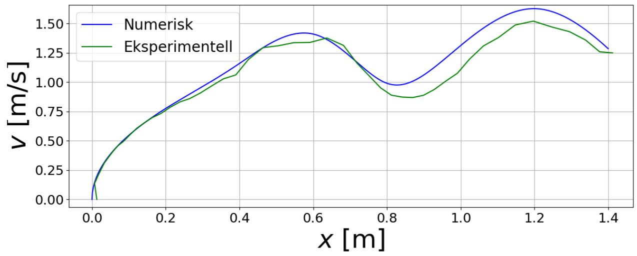
Figur 3: Numerisk og eksperimentell baneform når koordinatsystemet har origo nede i venstre hjørne av oppsettet. (Se figur 2.)



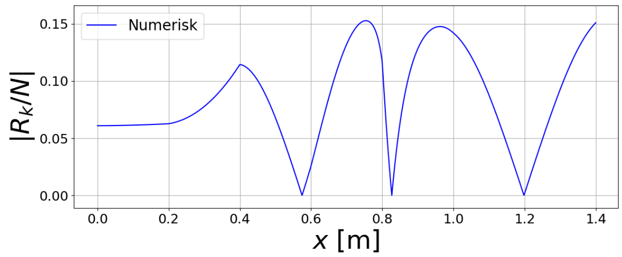
Figur 4: Kulens horisontale posisjon, x, som en funksjon av tiden, t.



Figur 5: Kulens numeriske og eksperimentelle hastighet, v, som en funksjon av tiden, t.



Figur 6: Kulens numeriske og eksperimentelle hastighet som funksjon av posisjonen, x.



Figur 7: Kulens beregnede friksjonskoeffisient for numerisk modell, gitt ved absoluttverdien av forholdet mellom friksjonskraften R_k og normalkraften N som funksjon av posisjonen, x. Dette vil være den teoretisk minste friksjonskoeffisienten kulen kan ha med underlaget dersom den skal rulle uten sluring.

5. Diskusjon

Fra figur 5 er det tydelig at farten eksperimentelt og numerisk samsvarer godt og at begge grafene generelt har den samme formen. Den eksperimentelle grafen gjør et tydelig "byks" i hastighet helt i starten, og dette kommer sannsynligvis fra lite presis markering av kulen i Tracker.

Det er lite sannsynlig at kulen ble sluppet på akkurat samme måte gjennom de ti eksperimentelle utføringene. Dermed vil startfarten være forskjellig for de ulike målingene, samt at høyden kulen ble sluppet fra kan ha variert noe. Dette vil føre til feil i måling av slutthastighet.

Videre var banen bredere enn kulen. Dette gjør det mulig for kulen å svinge fra side til side mens den ruller langs banen, og ikke utelukkende rulle i xy-planet. Dette fører til at kulen ikke utelukkende har hastighet som er synlig på videoen, men potensielt har fart mot eller fra kameraet. Dette kan også ha innvirkning på måling av slutthastighet, da Tracker ikke vil kunne måle den totale farten til kulen, slik at den målte farten blir for lav.

Ved analyse i Tracker ble kulen sporet langs banen. Dette er ikke en helt presis måte å si hvor kulen befinner seg på til enhver tid, da kulen i noen bilder strekkes ut. Det er dermed vanskelig å bestemme kulens nøyaktige posisjon. Samtidig var det i noen av videoene ikke tydelige bilder av kulen ved sluttpunktet. Dermed ble sluttpunktet i noen av tilfellene valgt litt før eller litt etter at kulen passerte siste festepunkt, noe som vil ha påvirket verdiene for den gjennomsnittlige slutthastigheten betraktelig.

Ellers kan man i figur 5 se at grafene stiger likt fram til første lokale maksimum, der den eksperimentelle grafen gjør noen brå endringer. Dette kommer sannsynligvis av målefeilene nevnt over. Etter første lokale maksimum følger den eksperimentelle grafen den numeriske godt, men farten er noe lavere. Dette kan være fordi det har blitt sett bort ifra luftmotstand eller at det ikke har blitt tatt høyde for at kula kan skli.

Den eksperimentelle og numeriske baneformen fra figur 3 er så å si identiske i form, men det er høydeforskjeller i flere av festepunktene. Den totale høydeforskjellen i eksperimentell bane er større enn i den numeriske banen. Dette vil føre til avvik mellom slutthastighetene til numerisk modell og eksperimentelle resultater.

Usikkerheten til sluttfarten er på 0.013 m/s. Slutthastigheten for numerisk modell ligger dermed litt over to usikkerheter fra slutthastigheten til de eksperimentelle resultatene. Dette er likevel ikke et stort avvik, som sannsynligvis kan forklares ved feilkildene beskrevet over. Tilsvarende kan avviket mellom grafene i figur 4 forklares av de samme feilkildene.

Det ble antatt at luftmotstanden ikke virket inn på kulens bevegelse langs den krumme banen. Fra matematikken kan man se at dette er en rimelig antagelse, da luftmotstanden er liten ved lave hastigheter - noe som er gjeldene i dette eksperimentet.

Det ble også gjort en antagelse om at kulen rullet langs banen uten å slure. I dette forsøket er det rimelig å anta at den statiske friksjonskoeffisienten for den eksperimentelle gjennomføringen ligger mellom 0.25 og 0.50.[5] Fra grafen i figur 7 kan det observeres at den minimale friksjonskoeffisienten som kreves for at kulen ikke skal gli, aldri overstiger 0.16. Den beregnede friksjonskoeffisienten blir aldri like høy som den antatte statiske friksjonskoeffisienten, slik at kulen vil rulle uten sluring.

Til tross for at numerisk slutthastighet ligger mer enn to usikkerheter unna eksperimentell slutthastighet, kan avviket bortforklares med målefeil. Numerisk modell og eksperimentelle resultater er relativt enige, dermed er det sannsynlig at antagelsene om at luftmotstanden ikke påvirker kulens bevegelse og at kulen ruller uten sluring, stemmer godt.

6. Konklusjon

Kulen ble målt gjentatte ganger mens den rullet ned en krummet bane. Ut ifra disse målingene ble grafer for posisjon og fart som funksjon av tiden beregnet numerisk og målt eksperimentelt. Det ble observert at de numeriske verdiene som ble beregnet er relativt gode tilnærminger til resultatene som ble funnet eksperimentelt. Den eksperimentelle slutthastigheten ble målt til å være (1.251 ± 0.013) m/s. Den numeriske slutthastigheten ble beregnet til 1.286 m/s, hvilket er litt over to usikkerheter unna den eksperimentelle slutthastigheten. Sluttfartene er ikke helt enige, noe som kan skyldes blant annet målefeil under filming og videoanalyse, samt et ikke ideelt oppsett av eksperimentet. Resultatene fra den numeriske modellen avviker allikevel lite fra de eksperimentelle resultatene. Dermed kan det konkluderes med at antagelsene gjort i den numeriske modellen er gode.

Referanser

[1] Grøn, Øyvind: *Newtons lover.* https://snl.no/Newtons_lover, sjekket: 12.10.20.

[2] Hervik, Sigbjørn: *Eulers metode.* https://snl.no/Eulers_metode, sjekket: 05.10.20.

[3] Grøn, Øyvind: *Treghetsmoment.* https://snl.no/treghetsmoment, sjekket: 12.10.20.

[4] Delphin, I.L.A.: *Sentripetalakselerasjon.* https://snl.no/sentripetalakselerasjon, sjekket: 15.10.20.

[5] Nesse, T. og V. Risinggård, Institutt for fysikk NTNU: *NTNU fysikklab.* http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/, sjekket: 15.10.20.