

Øving 4

1) Vinkelmomentet $\mathbf{L}$ er i klassisk mekanikk definert som $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, der $\mathbf{r}$ er posisjonen til partikkelen og $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ er bevegelsesmengden. Hvis vi lar $\mathbf{r} = (x, y, z)$ og $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, så kan vi skrive

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y p_z - z p_y \\ z p_x - x p_z \\ x p_y - y p_x \end{pmatrix}$$

a) Bruk substitusjonene $x \rightarrow \hat{x}$, $p_x \rightarrow \hat{p}_x$ (og tilsvarende for y og z) for å finne operatorene $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ og $\hat{L}_z$ som representerer x -, y -, og z -komponenten til vinkelmomentet $\mathbf{L}$.

Er usikker på notasjonene til denne oppgaven. Sliter litt med å se hva som står i den første vektoren (fet skrift eller ikke)

Fra oppgaveteksten:

$$\begin{aligned} L_x &= y p_z - z p_y \\ L_y &= z p_x - x p_z \\ L_z &= x p_y - y p_x \end{aligned}$$

Ved å bruke substitusjonene gitt i a) i tillegg: $\hat{x} = x$ og $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (tilsvarende for z og y):

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y = y(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}) - z(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) \\ \hat{L}_y &= \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z = z(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) - x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}) \\ \hat{L}_z &= \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) - y(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \end{aligned}$$

Ved å faktorisere ut konstantleddene:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Vet ikke om dette er ment å være ferdig svar eller om det skal settes inn i en vektor, men uttrykkene skal stemme.

b) Bekreft at

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{y}] &= 0 \\ [\hat{x}, \hat{p}_y] &= 0 \\ [\hat{p}_x, \hat{p}_y] &= 0 \end{aligned}$$

ved å se på effekten av kommutatorene på en vilkårlig funksjon $\phi(x, y)$.

Vi vet fra før at $\hat{x} = x$ og $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, og tilsvarende for y og z.

Definisjonen av kommutatorer gir: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Vi sjekker kommutatorene med funksjonen $\phi(x, y)$:

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{y}]\phi &= \hat{x}\hat{y}\phi - \hat{y}\hat{x}\phi = xy\phi - yx\phi = (xy - yx)\phi = 0 \\ [\hat{x}, \hat{p}_y]\phi &= \hat{x}\hat{p}_y\phi - \hat{p}_y\hat{x}\phi = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y})\phi - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y})x\phi = -i\hbar \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - x \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \\ [\hat{p}_x, \hat{p}_y]\phi &= \hat{p}_x\hat{p}_y\phi - \hat{p}_y\hat{p}_x\phi = (-i\hbar)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \end{aligned}$$

Dersom derivasjonsrekkefølgen for ϕ ikke påvirker resultatet (hvilket gjelder alle bølgefunksjoner jeg har vært borti så langt), blir dette:

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Vi har dermed fått alle resultatene vi var ute etter.

c) Vi har sett tidligere at

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$$

Bruk dette for å vise at

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

Hint: Man kan ekspandere kommutatorer på likt vis som vi gjør ved multiplikasjon av tall, f.eks. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$:

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C} + \hat{D}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{D}] + [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{D}]$$

Henter uttrykk fra 1 a):

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{y}\hat{p}_z + (-\hat{z}\hat{p}_y) \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \hat{z}\hat{p}_x + (-\hat{x}\hat{p}_z) \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\end{aligned}$$

Beregner kommutatoren (begynner med å ekspandere den etter formelen over):

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = -[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z]$$

Ettersom p_z kun bruker z som variabel, anser den x og y som konstanter, dermed vil:

$$[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_z] = 0$$

Tilsvarende bruker hverken p_x eller p_y z som variabel, slik at den behandles som som konstant, dermed vil:

$$[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x] = 0$$

Slik at:

$$\begin{aligned}[\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= -[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] \\ &= -\hat{y}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x + \hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z + \hat{z}\hat{p}_y\hat{x}\hat{p}_z - \hat{x}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_y\end{aligned}$$

Ettersom flere av kommutatorene ikke fungerer på samme variabler, kan man endre rekkefølgen på dem:

$$\begin{aligned}&= -\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x\hat{y} + \hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z + \hat{z}\hat{p}_z\hat{p}_y\hat{x} - \hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_y\hat{x} \\ &= -(\hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z})\hat{y}\hat{p}_x + (\hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z})\hat{p}_y\hat{x} \\ &= -(\hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z})\hat{y}\hat{p}_x + (\hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z})\hat{p}_y\hat{x}\end{aligned}$$

Uttrykkene i parentesene er likt uttrykket for kommutatoren $[\hat{z}, \hat{p}_z]$ som ifølge oppgaveteksten får verdien $i\hbar$:

$$\begin{aligned}&= -i\hbar\hat{y}\hat{p}_x + i\hbar\hat{p}_y\hat{x} \\ &= i\hbar(\hat{p}_y\hat{x} - \hat{y}\hat{p}_x)\end{aligned}$$

Fra oppgave 1a) har vi at $\hat{L}_z = \hat{p}_y\hat{x} - \hat{y}\hat{p}_x$:

$$= i\hbar\hat{L}_z$$

Slik at:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$$

Hvilket var det vi skulle vise.

d) Anta at et system er i en tilstand med en bestemt verdi av L_z lik $\hbar$. Hva sier usikkerhetsprinsippet da om usikkerheten i observablene L_x og L_y ?

Dersom systemet er i en tilstand ψ hvor verdien av $L_z = \hbar$, så er $\hbar$ en egenverdi:

$$\hat{L}_z \psi = \hbar \psi$$

Usikkerheten er gitt ved:

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y \right] \right\rangle \right|$$

Fra oppgave 1 c) har vi at $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y \right] = i\hbar \hat{L}_z$ dermed:

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{1}{2} \left| \left\langle i\hbar \hat{L}_z \right\rangle \right| = \frac{1}{2} \left| i\hbar \left\langle \hat{L}_z \right\rangle \right|$$

Ettersom $\hat{L}_z \psi = \hbar \psi$ vil $\left\langle \hat{L}_z \right\rangle = \hbar$:

$$\begin{aligned} \Delta L_x \Delta L_y &= \frac{1}{2} |i\hbar^2| \\ \Delta L_x \Delta L_y &= \frac{1}{2} \hbar^2 \end{aligned}$$

Usikkerhetsprinsippet gir at man ikke kan si sikkert hva L_x og L_y er med mindre systemet er i en tilstand der L_z er 0. Altså: Så lenge L_z ikke er 0 vil man ikke kunne si sikkert hva L_x og L_y er.

2) Schrödinger-likningen for en partikkel på en ring av radius r_0 er

$$\hat{H} \psi_{m_l}(\theta) = E_{m_l} \psi_{m_l}(\theta), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\theta^2}$$

der θ er vinkelen med x -aksen (der vi antar at partikkelen lever i xy -planet)

a) Bekreft at $\psi_{m_l}(\theta) = e^{im_l\theta}$ er en løsning av Schrödinger-ligningen for et vilkårlig reelt tall m_l .

Setter den foreslåtte løsningen inn i S.L.:

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi_{m_l}(\theta) &= -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\theta^2} e^{im_l\theta} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} (im_l)^2 e^{im_l\theta} \\ &= \frac{\hbar^2 m_l^2}{2mr_0^2} e^{im_l\theta} \\ &= E_{m_l} \psi_{m_l}(\theta) \end{aligned}$$

Dermed er løsningen en gyldig, og energien er gitt ved:

$$E_{m_l} = \frac{\hbar^2 m_l^2}{2mr_0^2}$$

b) Hvorfor kan vi kreve at $\psi_{m_l}(0) = \psi_{m_l}(2\pi)$? Vis at dette kravet fører til kvantiseringen $m_l = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$

Vi kan kreve det fordi partikkelen går på ring. Da er en vinkel på 0 den samme som 2π .

Kravet gir at:

$$\begin{aligned}\psi_{m_l}(0) &= \psi_{m_l}(2\pi) \\ e^{im_l 0} &= e^{im_l 2\pi} \\ 1 &= e^{im_l 2\pi} \\ 1 &= (e^{i\pi})^{2m_l} \\ (-1)^{2m_l} &= 1\end{aligned}$$

Likningen stemmer dersom m_l er et heltall, altså: $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dermed fører kravet til kvantisering.

c) Normaliser $\psi_{m_l}(\theta)$.

Den normaliserte bølgefunksjonen $\tilde{\psi}_{m_l}(\theta)$ er gitt ved:

$$\tilde{\psi}_{m_l}(\theta) = N\psi_{m_l}(\theta)$$

Finner N ved å løse likningen:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\psi}_{m_l} | \tilde{\psi}_{m_l} \rangle &= 1 \\ \langle N\psi_{m_l} | N\psi_{m_l} \rangle &= 1 \\ \int_0^{2\pi} (Ne^{im_l\theta})^* Ne^{im_l\theta} d\theta &= 1 \\ |N|^2 \int_0^{2\pi} e^{-im_l\theta} e^{im_l\theta} d\theta &= 1 \\ |N|^2 \int_0^{2\pi} e^0 d\theta &= 1 \\ |N|^2 \int_0^{2\pi} d\theta &= 1 \\ |N|^2 2\pi &= 1\end{aligned}$$

Antar at N er reell:

$$\begin{aligned}N^2 2\pi &= 1 \\ N^2 &= \frac{1}{2\pi} \\ N &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Den normaliserte bølgefunksjonen blir da:

$$\tilde{\psi}_{m_l}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\theta}$$

d) I polarkoordinater kan vi skrive $\hat{L}_z = -i\hbar \partial/\partial\theta$. Bekreft at $\psi_{m_l}(\theta)$ er en egenfunksjon av $\hat{L}_z$ med egenverdi $m_l \hbar$. Gitt den klassiske definisjonen $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, hvordan kan man forstå løsningene $\psi_{m_l}(\theta)$ for kvantetallene m_l og $-m_l$?

Dersom $\psi_{m_l}(\theta)$ er egenfunksjon, og $m_l\hbar$ er tilhørende egenverdi, så vil:

$$\hat{L}_z \psi_{m_l}(\theta) = m_l \hbar \psi_{m_l}(\theta)$$

Sjekker dette:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \psi_{m_l}(\theta) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} e^{im_l \theta} \\ &= -i\hbar (im_l) e^{im_l \theta} \\ &= m_l \hbar e^{im_l \theta} \\ &= m_l \hbar \psi_{m_l}(\theta) \\ \rightarrow \hat{L}_z \psi_{m_l}(\theta) &= m_l \hbar \psi_{m_l}(\theta) \end{aligned}$$

Altså stemmer påstanden om egenfunksjon og egenverdi.

Hadde vi løst samme likning for $-m_l$ ville vi fått det samme svaret med motsatt fortegn. m_l har ingenting å gjøre med posisjonen på sirkelbanen, men for bevegelsemengden har det noe å si. Dermed får vi at $+m_l$ og $-m_l$ svarer til bevegelse i motsatt retning på sirkelbanen. (med og mot klokka)

e) Gi en forklaring på hvorfor kommutasjonsrelasjonen $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$ medfører at energien og z -komponenten av vinkelmomentet er kompatible observabler.

Kompatible observabler kommuterer. Per definisjon vil to operatorer som kommuterer ha den egenskapen at de kan måles nøyaktig samtidig. Matematisk kommer dette av at det finnes en bølgefunksjon som er egenfunksjon til begge operatorene samtidig, altså finnes det en tilstand hvor begge størrelsene kan måles nøyaktig samtidig, og med samme verdi hver gang. (Altså ingen usikkerhet i målingen).