

Øving 3

Generell teori

1) Fra en ikke-normalisert bølgefunksjon $\psi(x)$ kan man konstruere en normalisert bølgefunksjon ved å skalere den med en faktor N :

$$\tilde{\psi}(x) = N \psi(x)$$

Finn et generelt uttrykk for N som avhenger av ψ . Skriv uttrykket i braket-notasjon.

Når man skal normalisere en bølgefunksjon, skal integralet av normkvadratet være 1. Altså:

$$\langle \tilde{\psi}(x) | \tilde{\psi}(x) \rangle = 1$$

For å få en ikke normert bølgefunksjon normert, ganges den med konstanten N . Ettersom N er en konstant i dette uttrykket, kan den settes utenfor integralet. Vi får dermed at:

$$|N|^2 \langle \psi(x) | \psi(x) \rangle = 1$$

Dermed kan N uttrykkes ved:

$$|N| = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi(x) | \psi(x) \rangle}}$$

2) Forventningsverdier kan uttrykkes med en ikke-normalisert bølgefunksjon $\psi(x)$. Bruk uttrykket $\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \tilde{\psi} | \hat{\Omega} | \tilde{\psi} \rangle$ til å uttrykke $\langle \hat{\Omega} \rangle$ ved $\psi(x)$ fra oppgave 1).

Forventningsverdien kan kun uttrykkes med uttrykket over dersom integralet av normkvadratet er 1. For en ikke normert bølgefunksjon, må man normere den for å kunne bruke dette uttrykket. Vi får altså:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Omega} \rangle &= \langle N\psi | \hat{\Omega} | N\psi \rangle \\ &= N^2 \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle \end{aligned}$$

Ved å sette inn uttrykket for N som ble funnet i oppgave 1, får vi:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

3) Anta at ψ er en superposisjon av to ortonormale funksjoner ψ_1 og ψ_2 :

$$\psi(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$$

Vis at $\langle \psi | \psi \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2$. Hva er normaliseringsfaktoren N ?

Antar at ψ_1 og ψ_2 er normerte.

Da er $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$ og $\langle \psi_n | \psi_k \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) | c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) \rangle \\ &= \langle c_1 \psi_1(x) | c_1 \psi_1(x) \rangle + \langle c_1 \psi_1(x) | c_2 \psi_2(x) \rangle + \langle c_2 \psi_2(x) | c_1 \psi_1(x) \rangle + \langle c_2 \psi_2(x) | c_2 \psi_2(x) \rangle \\ &= c_1^* c_1 \langle \psi_1(x) | \psi_1(x) \rangle + c_1^* c_2 \langle \psi_1(x) | \psi_2(x) \rangle + c_2^* c_1 \langle \psi_2(x) | \psi_1(x) \rangle + c_2^* c_2 \langle \psi_2(x) | \psi_2(x) \rangle \end{aligned}$$

Ved å bruke resultatet av antakelsen:

$$\begin{aligned} &= c_1^* c_1 + c_2^* c_2 \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 \end{aligned}$$

Dermed er:

$$\langle \psi | \psi \rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2$$

Ved å bruke formelen fra 1, får vi at normaliseringsfaktoren N kan uttrykkes ved:

$$|N| = \frac{1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}$$

Partikkel i boks

4) Vis at

$$\psi(x, y) = \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right)$$

er en løsning av Schrödinger-likningen for partikkel i to-dimensjonal boks.

Schrödinger-likningen for partikkel i to-dimensjonal boks:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \psi$$

Sjekker foreslått løsning:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{n_1^2 \pi^2}{L_1^2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) - \frac{n_2^2 \pi^2}{L_2^2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2 \pi^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2 \pi^2}{L_2^2} \right) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right) \psi \\ &= E \psi \end{aligned}$$

Dermed stemmer den foreslåtte løsningen, og egenverdien/energien er gitt ved:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right)$$

5) Vi konstruerer en normalisert bølgefunksjon $\tilde{\psi}(x, y) = N \psi(x, y)$. Vis at

$$N = \sqrt{\frac{4}{L_1 L_2}}$$

fra det generelle uttrykket utledet i 1.

$$N = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} |\psi(x, y)|^2 dx dy}}$$

Løser integralet og setter inn i formelen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} |\psi(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \left(\sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) \right)^* \left(\sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) \right) dx dy \\ &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \sin^2\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin^2\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) dx dy \\ &= \int_0^{L_1} \sin^2\left(\frac{n_1 \pi y}{L_1}\right) dy \int_0^{L_2} \sin^2\left(\frac{n_2 \pi x}{L_2}\right) dx \end{aligned}$$

Integralet ble løst for 1 dimensjon på øving 1. Henter svaret derfra:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{L_1} \sin^2\left(\frac{n_1 \pi y}{L_1}\right) dy \int_0^{L_2} \sin^2\left(\frac{n_2 \pi x}{L_2}\right) dx = \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{2} \\ &= \frac{L_1 L_2}{4} \end{aligned}$$

Setter denne løsningen inn i uttrykket for N:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 L_2}{4}}} \\ N &= \sqrt{\frac{4}{L_1 L_2}} \end{aligned}$$

Dermed fikk vi resultatet vi var ute etter.

6) Codecellen under plotter $|\psi(x, y)|^2$ for spesifiserte L_1 og L_2 verdier, med n_1 og n_2 verdier som kan varieres mellom 1 og 3 med slidere på plottet. I tillegg plottes energinivåer for tilstandene med $n_1 = 1, 2, 3$ og $n_2 = 1, 2, 3$.

Varier størrelsen på boksen fra $L_1 = L_2$ til en boks der en av sidene er betraktelig større enn den andre (f.eks $L_1 = 10L_2$) og spesifiser hvilke verdier av n_1 og n_2 som passer til energinivåene a-i. Hvilken sammenheng er det mellom størrelsen på boksene og degenerasjon?

In [1]:

```

%matplotlib notebook
from ipywidgets import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

L1 = 1
L2 = 1

fig = plt.figure(figsize=(9,5))
ax1 = fig.add_subplot(121,projection='3d')
ax2 = fig.add_subplot(122)

X = np.arange(0, L1, 0.01)
Y = np.arange(0, L2, 0.01)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
ax1.set_xlim(0,L1)
ax1.set_ylim(0,L2)

def update(n1=1,n2=1):
    ax1.cla()
    Z = 4/L1*L2*(np.sin(n1*np.pi*X/L1)**2*np.sin(n2*np.pi*Y/L2)**2)
    ax1.plot_surface(X, Y, Z)
    ax1.set_zlabel('$\psi^2$', rotation=90)

interact(update, n1=(1,3),n2=(1,3));

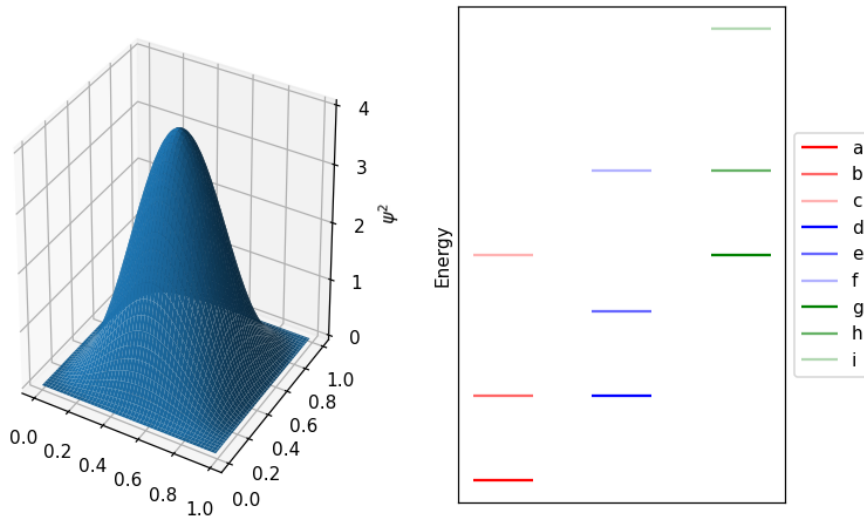
colors = ['r','b','g']
opacity = [1,0.6,0.3]
labels = np.array([[ 'a', 'b', 'c'],[ 'd', 'e', 'f'],[ 'g', 'h', 'i']])

for n1 in range(1,4):
    for n2 in range(1,4):
        energy = n1**2*np.pi**2/(2*L1)+ n2**2*np.pi**2/(2*L2)
        ax2.hlines(energy,2*n1,2*n1+1,color=colors[n1-1],alpha=opacity[n2-1],
label=labels[n1-1,n2-1])
ax2.set_xticks([], [])
ax2.set_yticks([], [])
ax2.legend()
ax2.set_ylabel('Energy');

box = ax2.get_position()
ax2.set_position([box.x0, box.y0, box.width * 0.8, box.height])

ax2.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5));

```



```
<ipython-input-1-6985b486aee6>:40: MatplotlibDeprecationWarning: Pas
sing the minor parameter of set_xticks() positionally is deprecated
since Matplotlib 3.2; the parameter will become keyword-only two min
or releases later.
```

```
ax2.set_xticks([], [])
```

```
<ipython-input-1-6985b486aee6>:41: MatplotlibDeprecationWarning: Pas
sing the minor parameter of set_yticks() positionally is deprecated
since Matplotlib 3.2; the parameter will become keyword-only two min
or releases later.
```

```
ax2.set_yticks([], [])
```

Jo mindre L_2 er i forhold til L_1 , jo mer bidrar n_2 til energien sammenliknet med n_1 . Med andre ord: Energien får høyere karakter av n_2 etter hvert som L_2 avtar i forhold til L_1

Dette gir mening ettersom energibidraget av n_2 er omvendt proporsjonal med L_2

Når L_1 og L_2 er like store får man degenererte energinivåer siden n_1 og n_2 bidrar like mye til energien. Da har f.eks tilstanden $n_1 = 1$ og $n_2 = 2$ samme energinivå som tilstanden $n_1 = 2$ og $n_2 = 1$.

Energinivåer og tilhørende n_1 og n_2 :

a: $n_1 = 1$ og $n_2 = 1$

b: $n_1 = 1$ og $n_2 = 2$

c: $n_1 = 1$ og $n_2 = 3$

d: $n_1 = 2$ og $n_2 = 1$

e: $n_1 = 2$ og $n_2 = 2$

f: $n_1 = 2$ og $n_2 = 3$

g: $n_1 = 3$ og $n_2 = 1$

h: $n_1 = 3$ og $n_2 = 2$

i: $n_1 = 3$ og $n_2 = 3$

Den harmoniske oscillator

7) Hamilton-operatoren for en harmonisk oscillator er

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2$$

Vis at

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-x^2/2\alpha^2}, \quad \alpha = \left(\frac{\hbar^2}{m k} \right)^{\frac{1}{4}},$$

er en løsning av den tidsuavhengige Schrödinger-likningen, det vil si, vis at

$$\hat{H} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x),$$

og bestem energien (E_0) til ψ_0 .

Vil vise at $\hat{H} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} N_0 e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= N_0 \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= N_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{-2x}{2\alpha^2} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= N_0 \left(\left(\frac{-1}{\alpha^2} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} + \left(\frac{-2x}{2\alpha^2} \right)^2 e^{-x^2/2\alpha^2} \right) \\
 &= N_0 \left(\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= N_0 \left(\frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha^4} \right) e^{-x^2/2\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Setter inn i den tidsuavhengige Schrödingerlikningen:

$$\hat{H} \psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} N_0 \left(\frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha^4} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{1}{2} k x^2 e^{-x^2/2\alpha^2}$$

Setter så inn uttrykket for α

$$\begin{aligned}
 \hat{H} \psi_0(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} N_0 \left(\frac{x^2 m k}{\hbar^2} - \sqrt{\frac{m k}{\hbar^2}} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{1}{2} k x^2 e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m k}{\hbar^2}} N_0 e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m k}{\hbar^2}} \psi_0 \\
 &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \psi_0 \\
 &= E_0 \psi
 \end{aligned}$$

Vi får at energien er gitt ved:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

8) Normaliser bølgefunksjonen $\psi_0(x)$.

Skal bestemme N_0 slik at: $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= N_0 e^{-x^2/2\alpha^2} \\ \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(N_0 e^{-x^2/2\alpha^2} \right)^* \left(N_0 e^{-x^2/2\alpha^2} \right) dx \\ &= N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2/2\alpha^2} dx \\ &= N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\alpha^2} dx\end{aligned}$$

La $u = \frac{x}{\alpha}$

$$\begin{aligned}&= N_0^2 \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= N_0^2 \alpha \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Dette medfører at:

$$\begin{aligned}N_0^2 \alpha \sqrt{\pi} &= 1 \\ N_0 &= \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Den normaliserte bølgefunksjonen blir da:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/2\alpha^2}$$

9) Den første eksiterte tilstanden for en harmonisk oscillator er

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}}} x e^{-x^2/2\alpha^2}$$

Vis at ψ_1 er en løsning av Schrödinger-likningen og finn energien (E_1).

Alt under rottegnet er konstant, starter med å finne den dobbeltderiverte til den delen av funksjonen som avhenger av x , ettersom dette er den tyngste regneoperasjonen (uten konstantleddet):

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} x e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{d}{dx} x \right) e^{-x^2/2\alpha^2} + x \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2/2\alpha^2} \right) \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{-x^2}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} e^{-x^2/2\alpha^2} + \left(\frac{d}{dx} \frac{-x^2}{\alpha^2} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{-x^2}{\alpha^2} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2/2\alpha^2} \right) \\
 &= \frac{-x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{-2x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^4} e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 \frac{d^2}{dx^2} x e^{-x^2/2\alpha^2} &= \left(\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^2} \right) x e^{-x^2/2\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Setter ψ_1 inn i S.L.:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} \psi_1(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}}} \left(\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^2} \right) x e^{-x^2/2\alpha^2} + \frac{1}{2} k x^2 \sqrt{\frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}}} x e^{-x^2/2\alpha^2} \\
 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{3}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} k x^2 \right) \sqrt{\frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}}} x e^{-x^2/2\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Ettersom det ikke skal gjøres noen flere operasjoner i stykket kan uttrykket for ψ_1 skrives som ψ_1 . Setter også inn uttrykket for α :

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{x^2}{\frac{\hbar^2}{m k}} - \frac{3}{\left(\frac{\hbar^2}{m k} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2} k x^2 \right) \psi_1 \\
 &= \left(-\frac{1}{2} k x^2 + \frac{3\hbar\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{2} k x^2 \right) \psi_1 \\
 &= \frac{3\hbar\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \psi_1 \\
 &\rightarrow \hat{H} \psi_1 = E_1 \psi_1
 \end{aligned}$$

Får at energien kan uttrykkes ved:

$$E_1 = \frac{3\hbar\sqrt{k}}{2\sqrt{m}}$$

10) Bestem sannsynligheten for å finne partikkelen mellom $x = -\frac{1}{2}\alpha$ og $x = \frac{1}{2}\alpha$ i to tilfeller: hvis partikkelen er i i) i grunntilstanden (ψ_0) og ii) i den første eksiterte tilstanden (ψ_1).

Den er gitt ved integralet av normkvadratet av funksjonen mellom x -verdiene:

i) Den ble nesten beregnet underveis i oppgave 8. Henter derfor den normerte bølgefunksjonen, og integralet derfra:

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} e^{-x^2/\alpha^2} dx$$

La $u = \frac{x}{\alpha}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (0.923) \\ &= 0.520 \\ &= 52.0\% \end{aligned}$$

ii) Antar at bølgefunksjonen vi får oppgitt i 9) er normert. Brukes samme substitusjon som i i) underveis

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} |\psi_1|^2 dx &= \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} \left| \sqrt{\frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}}} x e^{-x^2/2\alpha^2} \right|^2 dx \\ &= \frac{2}{\alpha^3 \pi^{1/2}} \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} x^2 e^{-x^2/\alpha^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}} (0.072) \\ &= 0.081 \\ &= 8.1\% \end{aligned}$$

11) Vibrasjonsbevegelsen i et diatomisk molekyl kan beskrives med en harmonisk oscillator, der x svarer til forflytning fra likevektsbindingslengden (der $x = 0$). Hva sier resultatet i 10) om sannsynligheten for å observere molekylet i nærheten av likevektsgeometrien?

Det er større sjanse for å finne molekylet nær likevektsbindingslengden i grunntilstanden ψ_0 enn det er å finne det i likevektsbindingslengden i første eksitasjonstilstand ψ_1 .

12) For harmonisk oscillator er $\langle x \rangle = 0$ for $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$. Bruk dette resultatet til å beregne usikkerheten Δx i oscillatorens posisjon x for ψ_0 og ψ_1 . Svarer forholdet mellom usikkerheten Δx i ψ_0 og ψ_1 til dine forventninger? Forklar.

Usikkerheten er gitt ved:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Ettersom det er gitt at $\langle x \rangle = 0$ blir uttrykket:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

For ψ_0 :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle \psi_0 | x^2 | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/\alpha^2} dx \end{aligned}$$

Lar $u = \frac{x}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du \\ &= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

For ψ_0 blir dermed:

$$\Delta x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

For ψ_1 :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle \psi_1 | x^2 | \psi_1 \rangle \\ &= \frac{2}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/\alpha^2} dx \end{aligned}$$

Lar $u = \frac{x}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2} du \\ &= \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ &= \frac{3\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

For ψ_1 blir dermed:

$$\Delta x = \frac{\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{2}}$$

.

Forholdet mellom usikkerhetene blir dermed $\sqrt{3}$ hvor usikkerheten for ψ_1 er størst. Altså er avstanden til likevekt forventet å være større for en eksitert oscillator (ψ_1) enn for en oscillator i grunntilstand (ψ_0). Det er som forventet ettersom en eksitert oscillator har større energi, og følgelig vil oscillere lengre unna likevekt sammenliknet med en oscillator i grunntilstand.