Innlevering 7 (frist 21. april)

Oppgaver til kapittel 13

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Finn en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og bestem generell løsning når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Vis at systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

5. Vi ser på det inhomogene systemet

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for løsningsrommet til den tilhørende homogene ligningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

b) Sjekk om $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$ eller $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning for systemet.

c) Finn en generell løsning for systemet.

Oppgaver til kapittel 14

1. Skriv om følgende andre ordens differensiallikninger til system.

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' + 2y' + 3y = 0$

c) $y'' + y' = 0$

2. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

3. Løs initialverdiproblemet

a) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

b) $y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = -e^{-2}$

4. Finn generell løsning av

a) $y'' - y' - 2y = e^{-2t}$

b) $y'' - y' - 2y = e^{2t}$

c) $y'' + y = t$

d) $y'' - 4y' + 4y = 4t$

5. For alle likningene i oppgave **14.1.** skal du: regne ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen, og det karakteristiske polynomet til matrisen i tilhørende system. Ser du en sammenheng? Klarer du å bevise observasjonen din?

Tallsvar

13.2.a: $c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix}25\\15\\6\end{bmatrix} e^{5t}$.

13.2.b: $c_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}$.

13.3.a: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^{2t}$.

13.3.b: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} e^{2t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} e^{2t} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} e^{-4t}$.

13.5.a: $c_1 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} e^{-t}$.

13.5.c: $c_1 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix}-2e^{-2t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$.

14.2.a: $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$.

14.2.b: $c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$.

14.2.c: $(c_1 + tc_2)e^{2t}$.

14.3.a: $\frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$.

14.3.b: $y = \sin(t)$.

14.3.c: $(t-1)e^{2(t-1)}$.

14.4.a: $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-2t}$.

14.4.b: $c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{2t}$.

14.4.c: $c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + t$.

14.4.d: $(c_1 + tc_2)e^{2t} + t + 1$.