

Innlevering 6 - Matematikk 3

Oppgave 1 a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{b}$ Minste kvadraters metode:

1. Finn A^T
2. Finn $A^T \cdot A$
3. Finn $A^T \cdot \underline{b}$
4. Løs $[A^T \cdot A; A^T \cdot \underline{b}]$

$$1. A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. A^T \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$4. [A^T \cdot A; A^T \cdot \underline{b}] = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 14 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 19 & -11 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -11/19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5/19 \\ 0 & 1 & -11/19 \end{bmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/38 \\ 0 & 1 & -11/19 \end{bmatrix}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{x} = \begin{bmatrix} 5/38 \\ -11/19 \end{bmatrix}}} \quad R$$

$$\Rightarrow A \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/38 \\ -11/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/19 \\ -37/38 \\ -27/38 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow A \hat{x}$ er punktet i kolonnerommet til A som minimerer avstanden til $\underline{b}$

Dope

b) Vi har en kompleks matrise, så vi må komplekskonjugere matrisen imens den transponeres vi får at A^T fra forrige blir $\overline{A^T} = A^*$, finner A^* iskedeb for A^T Nice.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & i & -1 & 1 \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. A^* \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 4 & 1 \\ -i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. A^* \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 1 & i & 1 & 1-i \\ 1 & 4 & 1 & 3-3i \\ -i & 1 & 3 & 1-2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 3 & 1-i & 2-2i \\ 0 & 1+i & 2 & 2-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}i \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -i \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{4} & \frac{3i}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{3i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(3-i) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(2-3i) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(-2-5i) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4}(3-i) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(2-3i) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{x} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2-5i \\ 3-i \\ 2-3i \end{bmatrix}}}$$

R

Perf

Oppgave 2: Bruker punktene, setter opp likningssystem direkte i matrise.

a)

$$\begin{bmatrix} 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 & 7 \\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3^1 & 1 & 5 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 1 & 3 \\ 1^4 & 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 0 & 2 \\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3^1 & 0 & 4 \\ 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4^1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \dots)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & 0 & -14 \\ 0 & -54 & -72 & -78 & 0 & -77 \\ 0 & -192 & -240 & -252 & 0 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 9 & 3\frac{1}{2} & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 48 & 84 & 0 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & 0 & \frac{35}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{35}{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_4(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{17}{12}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$$

R ye

b) Vi får

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$1. A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3. A^T \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 171 \\ 51 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$4. [A^T \cdot A : A^T \cdot \underline{b}] = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 & 171 \\ 100 & 30 & 10 & 51 \\ 30 & 10 & 5 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 3/5 \\ 100 & 30 & 10 & 51 \\ 354 & 100 & 30 & 171 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 3/5 \\ 0 & -10/3 & -20/3 & -9 \\ 0 & -18 & -29 & -207/5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 3/5 \\ 0 & 1 & 2 & 27/10 \\ 0 & 0 & 7 & 36/5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 9/14 \\ 0 & 0 & 1 & 36/35 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 9/14 \\ 0 & 0 & 1 & 36/35 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{p_2(x) \approx \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{14}x + \frac{36}{35}}$$

R yege

Oppgave 3: Vi vet at alle stokastiske matriser har egenverdi $\lambda = 1$. Finn tilhørende egenvektor.

a) $\lambda = 1$, $A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,5 \\ 0,2 & -0,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \end{bmatrix} \cdot t, t \in \mathbb{R}$$

Feil rekkefølge!
 $x_1 = \frac{5}{2}t, x_2 = t$

For å finne likvektvektor må t velges slik at kolonne summen av $\underline{v} = 1$

$$\Rightarrow t + 5/2 t = 1$$

$$7/2 t = 1$$

$$t = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

R ÷

b) $\lambda = 1$, $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$

Finner egenvektor:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & -0,8 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & -0,6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velger $x_3 = t$ som parameter

$$\Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

Igen, kolonnesum lik 1

$$t + \frac{1}{2}t + t = 1$$

$$\frac{5}{2}t = 1$$

$$t = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

R

Oppgave 4: Def: Stokastisk matrise er regulær hvis det finnes $k \geq 1$ s.a. alle element i $M^k > 0$

$$a) P^2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 & 0,2 \\ 0,16 & 0,8 \end{bmatrix} \Rightarrow k=2 \text{ har alle element } > 0$$

Ser at $k=1$ ikke fungerer

$\Rightarrow P$ er regulær

R

$$b) \text{ for } 2 \times 2 \text{ matrise } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ vil } A_2^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} & a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} a_{22} \\ a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} & a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{21} a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vi observerer at for enhver 2×2 -matrise A vil elementene til $A \cdot A$ på plass a_{21} og a_{12} få verdien 0 dersom henholdsvis a_{21} eller $a_{12} = 0$, det er også mulig å bevise at dette gjelder enhver potens $k \geq 1$ ved induksjon.

Har vist at dette gjelder for $k=2$. La oss se på plass $a_{21} = 0$

$$\text{For matrise } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Anta at dette stemmer for $k-1$:

$$A^{k-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Før at } A^k = A^{k-1} \cdot A = BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} b_{11} \cdot a_{11} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} \\ 0 & b_{22} \cdot a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Bevist ved induksjon}$$

Har vist at dersom $a_{21} = 0$ vil matrisen være ikke-regulær

Ser at a_{21} på Q er 0 $\Rightarrow$ Q er ikke-regulær

R

Bra

Oppgave 5:

1 dag: $T > 0$	$T = 0$	$T < 0$	Imorgen
0,7	0,1	0,1	$T > 0$
0,2	0,8	0,2	$T = 0$
0,1	0,1	0,7	$T < 0$

Gir matrisen: $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}$ Dette er en stokastisk matrise, den vil ha egenverdi $\lambda = 1$

Finner egenvektoren til $\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,1 & -0,1 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La $t = x_3 \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t, t \in \mathbb{R}$ må velge t s.a. kolonnesum $= 1$

$$4t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \text{ R har } \dots$$

Får $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(T > 0) = 25\% \\ P(T = 0) = 50\% \\ P(T < 0) = 25\% \end{array} \right\} \text{ Skiene bør preppes for } T = 0^\circ\text{C}$

Oppgave 6 Har $M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$ Stokastisk $\Rightarrow \lambda = 1$

Finner egenvektor:

$$M - I_2 = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot t$$

Likevektorsvektor: kolonnesum = 1 $\Rightarrow at + bt = 1$

Summen av kolonner = 1

$$t(a+b) = 1 \\ t = \frac{1}{(a+b)}$$

$\Rightarrow$ Likevektorsvektor $v = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ R

Eventyrlig: Teorem 12.10 sier at alle regulære stokastiske matriser har unik egenvektor, så det er gitt at v er unik ved teorem. Perf

Herlig.

E