Matematikk 3 – Innlevering 3

Kapittel 7: **Oppgave 1** Bruker aksiomene for underrom

a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \right\}$

1. $0+0=0$ ok!
2. $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0+0$ ok!
3. $c\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_2 \end{bmatrix} = c\cdot 0 = 0$ ok!

Alle x, y s.a $x+y=0$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$

R

b) 1. $0+0 \neq 1$ ikke ok! Nullvektoren til V ligger ikke i U

Det er ikke et underrom

R

c) $\mathbb{Q}^2$ er ikke et vektorrom, ved å velge $c=\pi$ vil

$c\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ gi en vektor utenfor $\mathbb{Q}^2$, hvilket gjør at det ikke er et vektorrom.

Det er ikke et underrom

R Fint!

Oppgave 2: a) Starter med å finne de ulike rommene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ferdig redusert $\left\{ \begin{aligned} x_2+x_3+x_7 &= 0 \\ x_5+x_7 &= 0 \\ x_6+x_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} x_2 &= -x_3-x_7 \\ x_5 &= -x_7 \\ x_6 &= -x_7 \end{aligned} \right.$

Skriv om, la $x_1 = q$, $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_7 = t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{får } B(\text{Null } A) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

R

$\dim(\text{Null } A) = 4$

$$B(\text{Col } A) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \dim(\text{Col } A) = 3$$

Kolonner med pivotelement

R

$$B(\text{Row } A) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \dim(\text{Row } A) = 3$$

Rader med pivotelem.

Flott! R

b) $$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\} \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$x_3 = t: \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \text{får } B(\text{Null } B) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(\text{Null } B) = 1$

$$B(\text{Col } B) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Col } B) = 2$$

X

$$B(\text{Row } B) = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Row } B) = 2$$

R

Tenk på om du vil klare å lage alle kolonnene i B bare ved lin. kombo av de to vektorene. Det går ikke iom at det er 0 i de to nederste elementene. Bruk de kolonnene i B som tilsvarer pivotkolonnene i stedet.

Når det gjelder måten å skrive en basis bruker jeg feks: $Col(A) = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

c) Sjekker A ved å multiplisere, dette er ikke mulig for B

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$ Ja, den ligger i nullrommet til A

~~Ikke i Null B~~

R

d) Den ligger ikke i kolonnerommet til A
hvis vi setter opp totalmatrise får vi $0 = -1$, det stemmer ikke.

Sjekker B: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Hvilket gir gyldig løsning $\Rightarrow$ Vektoren ligger i Col B

Den er i Col B, ikke i Col A

R

Oppgave 3:

a) Kan velge $x^2, x, 1. \Rightarrow B(P_2) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Spenner ut: $a \cdot x^2 + bx + c$ der a, b, c er valgfrie skalarer
kan gi alle 2. gradspolynom

Lineært uavhengige $ax^2 + bx + c = 0$ har kun triviell løsning
$a = 0, b = 0, c = 0$

b) $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

R

c) Velger $x^n, x^{n-1} \dots x, 1 \Rightarrow B(P_n) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

R

Oppgave 4:

a) Sjekker om det går gjennom origo

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} t = 0$$

I: $1 + s = -2t \Rightarrow s = -2t - 1 \Rightarrow s = 1$

II: $-1 + 2s = -3t$

III: $1 + 3s = -4t \Rightarrow 1 - 6t - 3 = -4t \Rightarrow \underline{t = -1}$

Setter inn i II: $\Rightarrow 1 \neq 3$, stemmer ikke,

Planet går ikke gjennom origo => det er ikke et underrom av K

R

b) Vektor $\vec{v}$ er en lineærkombinasjon av de andre, dermed får vi et underrom (de danner $\vec{0}$)

Det er et underrom

R

c) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \text{Col } A = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$

$\vec{u}$ er lineært uavhengig av vektorene i kolonnerommet, og ligger ikke i det (indirekte bevist i a)

$\vec{v}$ er lineært avhengig av vektorene i Col A => ligger i det.

R

$\vec{v}$ ligger i Col A, det gjør ikke $\vec{u}$ stemmer med a) og b)

Oppgave 5:

a) Usant, Hvis A = Nullmatrise => Col A = 0

R

b) Sant, siden det er flere kolonner enn rader, vil det alltid være lineært avhengige kolonner s.a. $A\vec{x} = 0$ vil la deg velge noen variabler s.a. dimensjonen av nullrommet > 0

R

Kapittel 8

Oppgave 1: a) $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ ikke lin. trans R

b) $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ikke lin. trans R

c) $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \vec{0}$ ok!

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}8x_1-7y_1\\3z_1-8x_1-7y_1\\5y_1-4x_1-8z_1\\6y_1-6x_1-4z_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Tilsvarende}\\\text{for } x_2, y_2, z_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}8(x_1+x_2)-7(y_1+y_2)\\3(z_1+z_2)-8(x_1+x_2)-7(y_1+y_2)\\5(y_1+y_2)-4(x_1+x_2)-8(z_1+z_2)\\6(y_1+y_2)-6(x_1+x_2)-4(z_1+z_2)\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\right) \Rightarrow \text{ok!}$$

$\Rightarrow$ Den er lin. trans

Standardmatrisen: $A = \begin{bmatrix}8 & -7 & 0\\-8 & -7 & 3\\-4 & 5 & -8\\-6 & 6 & -4\end{bmatrix}$ R

$A\vec{x} = 0$ $\left[\begin{array}{ccc|c}8 & -7 & 0 & 0\\-8 & -7 & 3 & 0\\-4 & 5 & -8 & 0\\-6 & 6 & -4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \text{Ker } T = 0$

$\Rightarrow$ Injektiv.

$\text{im } T = \text{col } A = \left\{\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\-7\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-8\\-4\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow T$ er ikke surjektiv, $\dim(\text{im } T) = 3$, underrom $\mathbb{R}^4$

Den er lin. trans, den er injektiv, ikke surjektiv R

d) $T(0)=0$ ok!

Velger å kun se på x-verdien "glemmer" de andre for å slippe skrivings, men prinsippet gjelder for x, y, z og w.

$$T(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

$$T(x_1)+T(x_2) = x_1^2+x_2^2$$

ikke like, ikke lineær trans.

R

e) $T(0)=0$ ok!

Kan lett se at kravet $T(\vec{v})+T(\vec{w}) = T(\vec{v}+\vec{w})$ er oppfylt verdiene blir ganget med en skalar, dermed oppfylles kravet

Strd. Matrs.: $A = [1\ 2\ 3\ 4]$

Ker $T \Rightarrow A\vec{x}=0 \Rightarrow [1\ 2\ 3\ 4 \mid 0]$, ingen entydig løsning $\Rightarrow$ ikke injektiv.

A har bare lineært uavhengige kolonner $\Rightarrow \dim(\mathrm{Col}\,A)=4$ den spenner ut hele $\mathbb{R}^4$, (dimensjon T) $\Rightarrow$ surjektiv

T er lin trans., men ikke injektiv. Den er surjektiv

R Flott.

Oppgave 2: a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, $A = T(e_1)+T(e_2)$

$$= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $A = T(e_1)+T(e_2)$

$$= T\left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Kun fortegnsfeil på rotasjonsmatrisen her, ellers bra.

Oppgave 3:

$$R \circ S : \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$S \circ R \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$S \circ R$ speiler planet om $y = -2x$, $R \circ S$ speiler plandet rundt $y = 2x$

Oppgave 4:

a) $D(0) = 0$
$D(P_1 + P_2) = (P_1 + P_2)' = D(P_1) + D(P_2)$ } lin. trans

$G(0) = 0$
$G(P_1 + P_2) = (P_1 + P_2) \cdot x = xP_1 + xP_2 = G(P_1) + G(P_2)$ } lin. tran

Det er bevist $\square$

R

b) Biblet til G er alle polynom der det er en x som faktor. Ker G er alle P som gir $G(p) = 0$; kun 0
$\text{Ker } G = 0$, $\text{Im } G = \{P \cdot x \mid P \neq 0\}$
Im D er alle polynom som kan skrives som en derivert av et annet polynom $\Rightarrow \text{Im } D = P$
Ker D er alle polynom der $D(p) = 0$
Ker $D = c$, der c er en vilkårlig konstant.

R

c) Injektiv dersom Ker T inneholder kun $\vec{0}$
Surjektiv dersom $\text{Im } T = \mathbb{R}^m$ $(T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

$\Rightarrow$ G er injektiv, ikke surjektiv
D er ikke injektiv, men surjektiv

R

d) $D \circ G = D(x \cdot P(x)) = P + xP'$

$G \circ D = G(P') = xP'$

$\underline{D \circ G(x) - G \circ D(x) = P(x)}$ R

e) $P_2 : (e_0, e_1, e_2) = (1, x, x^2)$, $P_3 : (e_0, e_1, e_2, e_3) = (1, x, x^2, x^3)$

Basis P_2: $1, x, x^2$, Basis P_3: $1, x, x^2, x^3$

$D_3 : A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $G_3 : A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ R

Oppgave 5: a) Fra matte 1: $(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = cf'$ R

$\underline{D(f) = f'}$
Gir at

$\left.\begin{array}{l} D(f+g) = D(f) + D(g) \\ D(c \cdot f) = c \cdot D(f) \end{array}\right\}$ Per def: D er lin. trans. $\square$

b) Ker D, alle f s.a. $f' = 0 \Rightarrow$ Ker $D = f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$
Ker $D = 1$, det er et endeligdimensjonalt vektorrom R

$f(f) = g(c)$

c) D er surjektiv ettersom alle polynom kan skrives som den deriverte av et annet polynom, (Ja, den er surjektiv) R

$D(F) = f = F'$ v/fund. teorem: $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow$ surjektiv

Flott øving!

EB