

Innlevering 2 - Matematikk 3

Kapittel 3:

Oppgave 1:

a) Skriver om likningen:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_7 = 0 \\ x_5 + x_7 = 0 \\ x_6 + x_7 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi har 3 likninger, og 5 ukjente, vi trenger 2 parametre

La $x_7 = t$, $x_3 = s$

Vi får

$$x_2 = -t - s$$

$$x_5 = -t$$

$$x_6 = -t$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot s$$

Her ser det ut til at du har glemt x_1 og x_4 , så svaret blir ikke helt rett. Husk at uansett hvilken verdi du tar så endres ikke løsningen.

b) Skriver om:

$$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3/2 & -8 & -9/2 \\ 0 & 3/4 & -4 & -9/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{215}{28} & -\frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{156}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{187}{215} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{156}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{83}{215} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{187}{215} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{156}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{215} \begin{bmatrix} 83 \\ -187 \\ 156 \\ 215 \end{bmatrix} \quad \text{R}$$

Finner ingen x_4 i denne oppgaven.

Oppgave 2: La $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ spanner ut $\mathbb{R}^3$
dermed de ikke er en lineærkombinasjon
av hverandre

$$\begin{bmatrix} u_1 & -3 & 8 \\ u_2 & -7 & -8 \\ u_3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{bmatrix} u_1 & -3 & 8 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_1 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{u_2=u_3=0} \Rightarrow u_1=1 \Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ siden vi kan gjøre Gauss-} \\ \text{eliminering og f\aa dette, spanner} \\ \text{vektoren ut i } \mathbb{R}^3$$

Løser likningen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 & | & 0 \\ 0 & -7 & -8 & | & 0 \\ 0 & -3 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & | & 0 \\ 0 & -3 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{løsning av likning}$$

$x=y=z=0, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

R

Oppgave 3:

a) For: $x^2 + 8x + 2 = ax^2 + 5ax - 3a + 4bx^2 + 18bx + 4b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 4b = 1 \\ 5a + 18b = 8 \\ -3a + 4b = 2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 18 & 1 & 8 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 16 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array} \right] \Rightarrow \text{ingen løsning, } 0 \neq 29$$

b) La $t(x) = tx^2 + tx + t_3$, vi må bestemme $t(x)$ s.a.

$$\begin{cases} a + 4b + t_1c = d \\ 5a + 18b + t_2c = e \\ -3a + 4b + t_3c = f \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{der } d, e, f \in \mathbb{R} \\ \text{alltid har en løsning} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t_1 & d \\ 5 & 18 & t_2 & e \\ -3 & 4 & t_3 & f \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t_1 & d \\ 0 & -2 & t_2 - 5t_1 & e - 5d \\ 0 & 4 & t_3 + 3t_1 & f + 3d \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t_1 & d \\ 0 & -2 & t_2 - 5t_1 & e - 5d \\ 0 & 0 & t_3 + 2t_2 - 7t_1 & f + e - 7d \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \\ t_3 = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & d \\ 0 & -2 & -1 & e - 5d \\ 0 & 0 & 2 & f + e - 7d \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & d \\ 0 & 2 & 1 & 5d - e \\ 0 & 0 & 1 & \frac{f + e - 7d}{2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9d - 2e - (f + e - 7d)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(5d - e)}{2} - \frac{(f + e - 7d)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{f + e - 7d}{2} \end{array} \right]$$

Vi får ett uttrykk som gir en entydig løsning, vi kan la t være gitt ved:

$$t(x) = x^2 + 4x + 1$$

Kapittel 4:

Oppgave 1:

$$\begin{aligned} A\vec{w} &= A(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ &= A(2A^{-1} \cdot A\vec{v}_1 - A^{-1} \cdot A\vec{v}_2) \\ &= 2A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Hmm... Her er jeg litt usikker på hva som har skjedd

Oppgave 2:

a) $1 \cdot i - 1 \cdot i = 0$, denne er ikke invertierbar $\mathcal{R}$
(ad-bc)

b) 1 matrisen er rektangulær, den er ikke invertierbar. $\mathcal{R}$

c)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{for ingen entydig invers} \mathcal{R}$$

matrise, den er ikke invertierbar

Oppgave 3:

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix}$

Da får 2 stk likningssett med form: $a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = b_{11}$, der a_{ij} og b_{ij} er kjent.
 $a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = b_{21}$

b) Uløselig A^{-1} eksisterer ikke

$\mathcal{R}$

Oppgave 4:

- a) Man kan ikke bytte rekkefølge på matrisene uten å endre svaret, derfor kan man ikke løse den som to 2×2 -systemer

$$XB \neq BX \Rightarrow \underline{AX + XB \neq X(A+B)}$$

R

b) La $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tilsvarende for B, C og X

Vi kan da sette opp 4 likninger

$$\begin{aligned} \text{I:} & (a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21}) + (x_{11}b_{11} + x_{12}b_{21}) = c_{11} \\ \text{II:} & (a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22}) + (x_{11}b_{12} + x_{12}b_{22}) = c_{12} \\ \text{III:} & (a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21}) + (x_{21}b_{11} + x_{22}b_{21}) = c_{21} \\ \text{IV:} & (a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22}) + (x_{21}b_{12} + x_{22}b_{22}) = c_{22} \end{aligned}$$

Totalmatrise (kombinerer ledd med like x_{ij})

$$\begin{array}{cccc|c} (x_{11}) & (x_{12}) & (x_{21}) & (x_{22}) & \\ \hline a_{11}+b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 & c_{11} \\ b_{12} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12} & c_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{21} & c_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22}+b_{22} & c_{22} \end{array}$$

$$\text{c) } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right]$$

Se svar
neste
side.

c) forts $X_{11} = X_{12} = X_{21} = X_{22} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

R

Kapittel 5:

Oppgave 1: v_1 og v_2 utspenner $\mathbb{R}^2$, de er ikke parallelle.

w_1, w_2, w_3 utspenner $\mathbb{R}^2$, de er heller ikke parallelle, men lineært avhengige.

Oppgave 2: a)

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 4 & | & 0 \\ 3 & 4 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får uendelig antall løsninger $\Rightarrow$ de er lineært avhengige

b) $\begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i & | & 0 \\ 4 & 2i & 10+2i & | & 0 \\ 2i & -1 & 4+6i & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i & | & 0 \\ 2 & i & 5-i & | & 0 \\ 2i & -1 & 4+6i & | & 0 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i & | & 0 \\ 0 & 0 & 2i & | & 0 \\ -2 & i & 4i-6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

får $c=0$ og $a = -\frac{i}{2}b \Rightarrow$ De er lineært avhengige

R

Kapittel 6:

Oppgave 1: a) $ad-bc=1-3$, lineært uavhengige

$$b) \det = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 15 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-4-105) + 5(2+42) + 3(30-24)$$
$$= -218 + 220 + 18 = 20$$

$\det = 20$, lineært uavhengige

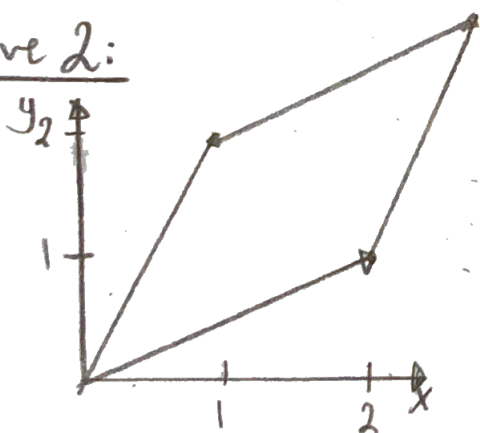
$$c) \det = 2i \begin{vmatrix} -4i & 7 \\ 15 & i \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -6 & i \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -4i \\ -6 & 15 \end{vmatrix}$$
$$= 2i(4-105) + 5(2i+42) + 3(30-24i)$$

$$= -202i + 10i + 210 + 90 - 72i$$

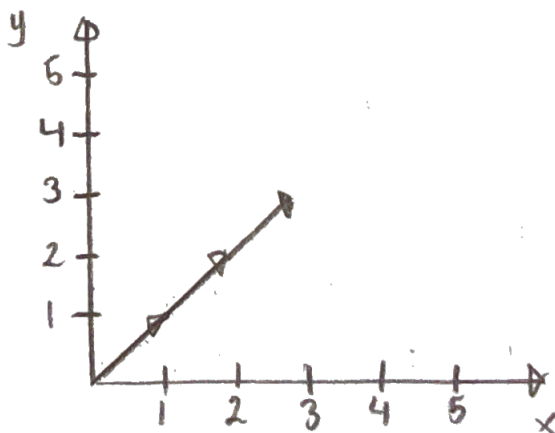
$= 300 - 264i$, lineært uavhengige

Oppgave 2:

a)



b)



$$A = |\det|$$
$$= |3|$$
$$= 3$$

$A=3$

$$A = |\det|$$
$$= 0$$

$A=0$

R

Oppgave 3:

$$\begin{aligned} a) \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix} \\ &= -bc \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z \end{vmatrix} = -bc(-xy) = \underline{\underline{bcxy}} \end{aligned}$$

b) den er inverterbar så lenge determinanten $\neq 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0}}$$

R

Finnt! Og lesbart! ☺

Est