Skriftlig innlevering 4

Våren 2020

Innleveringsfrist: 3. april 2020, kl. 16.00.

$\boxed{1}$ La $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{2z}\mathbf{i} + ye^{2z}\mathbf{j} - e^{2z}\mathbf{k}$. Vis at $\mathbf{F}$ er divergensfritt, og bestem to ulike vektorpotensial til $\mathbf{F}$, dvs. bestem to vektorfelt $\mathbf{G}$ og $\mathbf{H}$, $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$, som er slik at curl $\mathbf{G}(x, y, z) =$ curl $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

$\boxed{2}$ La D være det lukkede området avgrenset av x-aksen og grafen til $y = 4 - x^2$. La $\mathcal{C} = \partial D$ være randen til D orientert i positiv omløpsretning. Bruk Greens teorem til å beregne linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + y^2)\, dx + (\cos x - xy)\, dy,$$

Hint: I det integralet du får å regne ut til slutt, kan det være lurt å gjøre bruk av egenskaper til like og odde funksjoner.

$\boxed{3}$ La $\mathcal{S}$ være den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ der $z \geq 3$, og la T være legemet begrenset av $\mathcal{S}$ og planet $z = 3$.

a) Bestem volumet til T.

b) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Finn verdien av flateintegralet (fluksintegralet)

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ med positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Hint: Legg merke til at $\mathcal{S}$ ikke er en lukket flate.

$\boxed{4}$ La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, 4x - y, z^2 + xy)$$

for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, og la $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ og $z = \sqrt{10}$, orientert mot klokken sett ovenfra.

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$