

Innlevering 1 - Matematikk 2

Oppgave 1

To likninger: $Z = 2 - x^2 - y^2$
(plan) $Z = x^2 - 2x + y^2 - 4y$

Parametrisering: for $z = z$:

$$2 - x^2 - y^2 = x^2 - 2x + y^2 - 4y$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 4y = 2 \quad / \text{ Fullfører kvadratene}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - 2y &= 1 \\ (x^2 - x + 1/4) + (y^2 - 2y + 1) &= 1 + 1/4 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x - 1/2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \leftarrow \text{Merk! sirkellikning, } r = \frac{3}{2}, S: (1/2, 1)$$

Videre, del på $(3/2)^2$

$$\Rightarrow \frac{(x - 1/2)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y - 1)^2}{(3/2)^2} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Kan parametriseres som en} \\ \text{ellipse } (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} x - 1/2 &= 3/2 \cos t, & y - 1 &= 3/2 \sin t \\ x &= 3/2 \cos t + 1/2, & y &= 3/2 \sin t + 1 \end{aligned}$$

Foreløpig: $x = 3/2 \cos t + 1/2$
 $y = 3/2 \sin t + 1$
 z ukjent

Finnes z ved å sette inn x og y i den ene planlikningen:

$$\begin{aligned} Z = 2 - x^2 - y^2 &= 2 - (3/2 \cos t + 1/2)^2 - (3/2 \sin t + 1)^2 \\ &= 2 - \frac{9}{4} \cos^2 t - \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} \sin^2 t - 3 \sin t - 1 \\ &= 2 - \frac{1}{4} - 1 - \frac{9}{4} (\cos^2 t + \sin^2 t) - \frac{3}{2} \cos t - 3 \sin t \\ \underline{Z} &= -3/2 - 3/2 \cos t - 3 \sin t \end{aligned}$$

Se neste side for svar



Da vi satte $z = \bar{z}$ eliminerte vi z , og fikk ut en sirkellikning i xy -planet, projeksjonen i xy -planet blir en sirkel.

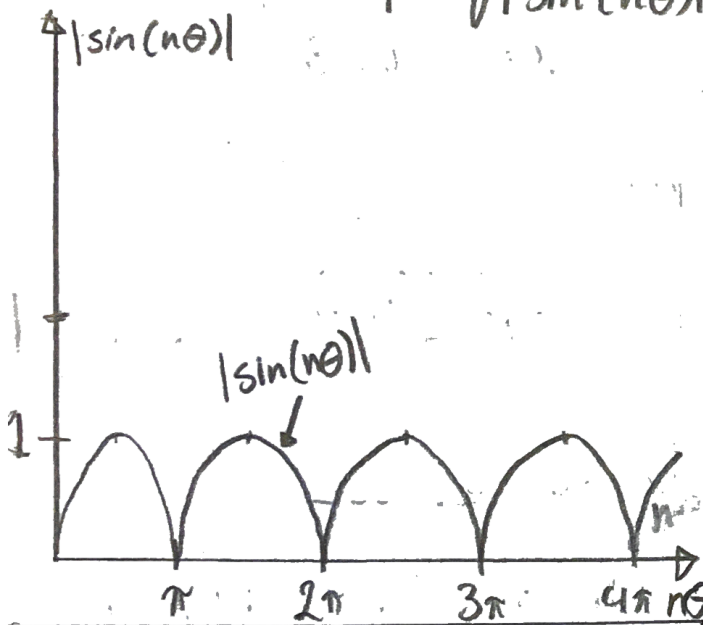
Parametrisering av skjæringskurven:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \sin t + 1 \\ z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos t - 3 \sin t \end{cases}$$

Projeksjon xy -plan: Sirkel, $r = \frac{3}{2}$, $S: (\frac{1}{2}, 1)$

Oppgave 2

$$r = \sqrt{|\sin(n\theta)|}$$



sinusfunksjonen har nullpunkt i $0 + 2\pi k$ og $\pi + 2\pi k$ for $k = 1, 2, 3, \dots$

For $n=1$ vil vi få 3 nullpunkt i $0, \pi, 2\pi$

for $n=2$ får vi +2 nullpunkt ettersom på $0 \leq \theta \leq 2\pi$

gir $n\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

Dette mønsteret repeteres. #N.p. = $2n+1$

Ettersom kurven starter og slutter i samme punkt, vil vi få et mindre

kronblad enn antall nullpunkt, siden grafen > 0 for alle $n\theta \neq k\pi$

for $k = 0, 1, 2, \dots$, får vi at

antallet kronblad = $2n$

For å finne arealet kan vi finne arealet av et kronblad, og gange det med antall kronblad $2n$. Siden grafen starter i $\theta = 0$

vil vi få et helt kronblad frem til første nullpunkt. Første nullpunkt er når $n\theta = \pi \Rightarrow \theta = \pi/n$. Videre er $\sin(n\theta) > 0$ for $\theta \in (0, \pi/n)$, så vi

kan ignorere abs.verdi. begyn

$$A_{\text{kronblad}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} (\sqrt{|\sin(n\theta)|})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \sin(n\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n} du = \frac{1}{2n} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{-(-1) - (-1)}{2n}$$

$$= \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$A_{\text{tot}} = 2n \cdot A_{\text{kronblad}} = 2n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

$$\underline{A = 2 \text{ og antall kronblad} = 2n}$$

$$\text{La } u = n\theta$$

$$\Rightarrow du = n d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{n}$$

$$\theta = \frac{\pi}{n} \Rightarrow u = \pi$$

$$\theta = 0 \Rightarrow u = 0$$

Oppgave 3:

Må sjekke om det finnes en entydig c , når $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Uavhengig av retning.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy + x^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy + x^4}{x^2 + y^2} = *$$
$$\stackrel{r \rightarrow 0^+}{=} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r \cos \theta \cdot \sin \theta + r^4 \cos^4 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$
$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^4 \theta}{1} = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta)$$

Gjør om til polarkoordinater

$$\text{h.c. } x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\text{da er } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r, \theta)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} 2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^4 \theta = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta)$$

Grenseverdien avhenger av θ , vi får ikke et entydig svar, det finnes ingen c som gjør at funksjonen blir kontinuerlig.

Oppgave 4: Likningen er "generelt": $z = f(a,b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b)$

Vært tilfeldig: $f(x,y) = \cos^2 x + \sin x \cdot \cos y$ Punkt: $(\pi/4, \pi/4, 1)$
 $f(\pi/4, \pi/4) = 1$ (fra punktet)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -2 \cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\pi/4, \pi/4) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\sin y \cdot \sin x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(\pi/4, \pi/4) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

Setter inn i formel, får: $z = 1 - \frac{1}{2}(x - \pi/4) - \frac{1}{2}(y - \pi/4)$

$$= 1 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$