

Innlevering 4 - Eriend Sørli

Vi har rekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n}}$

Frå skissen ser vi at rekken vil være alternerende ettersom den vil vekste mellom

$\sin(\frac{\pi}{4})$ og $-\sin(\frac{\pi}{4})$, vi kan dermed bruke alternerende rekkelest.

Alternerende rekker konvergerer dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Siden $\sin x \in [-1, 1]$, har vi at:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n}} \leq 0, \text{ vi benytter skvisteeemet}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$\Rightarrow$ Rekken konvergerer

2

a) Vi har rekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n$, forholdstesten gir at dersom

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = p$, og $0 \leq p < 1$, så konvergerer rekken.

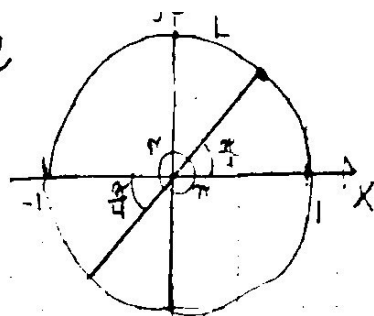
Vi lar $a_n = \frac{n}{(n-1)!} x^n$, dette gir:

$$p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot x \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n^2} x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} \cdot x \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot |x|$$

$= 0 \cdot |x| = 0 = p$. $p = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, dette oppfyller forholdstestens krav for konvergens, og rekken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$

Q.E.D.



skisse: Enhetssirkelen.

2

b) Vi har rekken: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n$

Videre vet vi at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Vi kan skrive om rekken;

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n!} x^{n+1} + \frac{1}{n!} x^{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + x \cdot e^x \end{aligned}$$

Calculus fundamentelteorem sier at for $a \leq x \leq b$
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Videre kan vi gjøre følgende operasjon på rekke:
 $\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n t^n dt$, og tilsvarende for derivasjon

Vi ser nå på $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1}$, x kan sees på som en konstant for rekke

Ved å benytte det over, får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = x^2 \left(\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} dt \right)' \\ &= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{n!} t^{n-1} dt \right)' = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \cdot \frac{x^n}{n} \right)' = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= x^2 \cdot (e^x)' = x^2 \cdot e^x \quad \text{Vi setter dette inn der vi slapp.} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + x \cdot e^x = x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x^2 + x) e^x \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = (x^2 + x) e^x}}$$

3

a) Vi skal finne Taylorrekke om $x=0$ for $\int_0^x e^{-t^2} dt$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ lar } x = -t^2 \Rightarrow e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \text{ har Taylorrekke } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \text{ om } x=0$$

b) For et Taylorpolynom er feilen mindre eller lik absoluttverdien til neste ledd. Vi lar $T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$

$$|f(x) - T_n(x)| \leq |a_{n+1}| < 0,0005 = \frac{1}{2000}$$

$$T_n(1) = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \cdot 1^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

$$|f(1) - T_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{2000}$$

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{2000}$$

$$T_5(1) \text{ gir feil } < 0,0005$$

$\Rightarrow$ Vi trenger 6 ledd

n	Feil = $ a_{n+1} $
0	1/3
1	1/10
2	1/42
3	1/216
4	1/1320
5	1/9360 < 1/2000

4 a) Forklar $\frac{dN}{dt} = kN(1000-N)$

I oppgaven er det gitt at antall fisk smittet per tidsenhet er proporsjonalt med antall smittede fisk og antall friske fisk.

Ettersom $N(t)$ betegner antall smittede fisk ved tiden t , vil farten smitten sprer seg i, eller antall fisk smittet per tidsenhet være gitt ved $N'(t) = \frac{dN}{dt}$, som er gitt ved

proporsjonalitetskonstant $\cdot$ antall smittede fisk $\cdot$ antall friske fisk

$$\text{vi får: } \frac{dN}{dt} = k N (1000 - N) \quad \text{*OBS! Her glapp en del av oppgaven, den er lagt til på slutten av innføringen.}$$

b) vi lar $N(t)=y$, fra a) får vi likningen

$$y' = ky(1000-y), \quad N(0) = y_0 = 1 \wedge k = 0,005$$

Eulers metode:

$$y_{n+1} \approx y_n + hf(x_n, y_n) \quad x \in [\alpha, \beta]$$

$$h = 0,25 \quad x_n = 1 \Rightarrow 0 + 0,25 \cdot n = 1 \quad x_n = \alpha + h \cdot n$$

$\Rightarrow$ Vi må finne y_4

$$y_{n+1} = y_n + (0,25 \cdot 0,005 \cdot y_n(1000 - y_n))$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 2,76$$

$$y_2 = 5,05$$

$$y_3 = 11,34$$

$$y_4 = 25,35$$

$$\underline{N(1) \approx y_4 = 25,35} \quad (\approx 25, 0,35 \text{ smittede fisk gir ikke mening})$$

4 c) $y' = ky(1000 - y)$

$$\int \frac{dy}{y(1000-y)} = \int k + C = kx + C$$

$$\int \frac{dy}{1000y} + \int \frac{dy}{1000(1000-y)} = kx + C$$

$$\frac{1}{1000} \left(\int \frac{dy}{y} + \frac{dy}{1000-y} \right) = kx + C$$

$$\frac{1}{1000} (\ln y - \ln 1000 - y) = kx + C$$

$$\ln y - \ln(1000 - y) = 1000(kx + C)$$

[Setter inn $k = 0.005$]

$$\ln \frac{y}{1000-y} = 5x + 1000C$$

$N(0) = 1 \Rightarrow$ når $x = 0$, $y = 1$. Bruker dette for å finne C

$$\begin{cases} \ln \frac{1}{1000-1} = 0 + 1000C \\ \ln \frac{1}{999} = 1000C \\ C = -\frac{\ln 999}{1000} \end{cases}$$

Setter inn $C = -\frac{\ln 999}{1000}$ i $\ln \frac{y}{1000-y} = 5x + 1000C$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{1000-y} = 5x - \ln 999 \quad / e^n$$

$$\frac{y}{1000-y} = e^{5x - \ln 999} = \frac{e^{5x}}{999}$$

$$y = \frac{1000 e^{5x}}{999} - y \frac{e^{5x}}{999}$$

$$y \left(1 + \frac{e^{5x}}{999} \right) = \frac{1000 e^{5x}}{999}$$

$$y = \frac{1000 e^{5x}}{999} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{e^{5x}}{999} \right)} = \frac{1000 e^{5x}}{999 + e^{5x}}$$

Regnestykket ble gjort med $y = N(t)$ og $x = t$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{1000 e^{5t}}{999 + e^{5t}}$$

$$\frac{1}{y(1000-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1000-y}$$

$$\Rightarrow \frac{1000A - Ay + By}{y(1000-y)} = \frac{1}{y(1000-y)}$$

$$\Rightarrow 1000A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{1000}$$

$$B - A = 0$$

$$B = A = \frac{1}{1000}$$

$$\int \frac{dy}{1000-y} \quad \begin{cases} u = 1000-y \\ y = 1000-u \\ dy = -du \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{1000-y} = -\int \frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \int -\frac{du}{u} = -\ln u = -\ln(1000-y)$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad c) \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 1000 \cdot \frac{e^{5t}}{999 + e^{5t}} = 1000 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{5t}}{e^{5t}}}{\frac{999}{e^{5t}} + \frac{e^{5t}}{e^{5t}}} \\
 &= 1000 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{999}{e^{5t}} + 1} = 1000 \cdot 1 = 1000 \\
 N(t) &= 1000 \frac{e^{5t}}{999 + e^{5t}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1000
 \end{aligned}$$

4 d) * Resterende av oppgaven

- Hva kan sies om veksten i antall smittede fisk når halvparten er smittet? Halvparten = 500 $\Rightarrow N'(t) = k \cdot 500^2$

Ettersom N og $(1000 - N)$, er knyttet til hverandre slik at når N øker med 1, minsker $(1000 - N)$ med 1, vil

$N'(t)$ være størst når $N = (1000 - N) \Rightarrow N = 500$, dette

er dermed når smittetfarten er høyest. (forholdet = 1)

$\Rightarrow$ Veksten i antall smittede fisk ved $N=500$ er den høyeste smittetfarten, den er gitt ved $500^2 k$