

Innlevering 3 - Erlend Sørli

a) Regel som vil bli brukt: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{subst: } t = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ \text{Grenser: } x \rightarrow \infty: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = t \Rightarrow t = 0 \\ x = 1; \frac{1}{1} = t \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_1^0 \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = - \int_1^0 \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t^2} dt \\ &= - \int_1^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad (\text{Regel}) \\ \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad \underline{\text{Q.E.D.}} \end{aligned}$$

b) $S_{2n}, 2n=4 \Rightarrow S_4$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad h = \frac{1-0}{2n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \frac{1}{4}$$

$$x_k = k \cdot h = k \cdot \frac{1}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow x_k = \frac{k}{4}$$

$$S_4 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \quad f(x_k) = \frac{1}{1+x_k^2}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(1 \cdot 4 \cdot \frac{16}{17} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{2} \right)$$

$$S_4 = 0,78539 \dots \approx 0,785$$

$$\underline{\underline{S_4 = 0,785}}$$

k	x_k	y_k
0	0	1
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{17}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{25}$
4	1	$\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{1+x^2}$ er en jevn funksjon ettersom vi har x^2
og $a^2 = (-a)^2$

dermed kan vi ved hjelp av det vi fant i a) få:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right)$$

$$(\text{setter inn a}): = 2 \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right)$$

vi lar $t=x$:

$$2 \left(2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Ved å bruke S_4 fra b), har vi en tilnærming av π
gitt ved:

$$\pi \approx 4 \cdot S_4 = 3,14167 \approx 3,142$$

Feilen E for tilnærmingen finner vi ved:

$$E = |\pi - 4 \cdot S_4| \text{ (her er } S_4 \text{ beholdt nøyaktig på}$$

$$E = 2,403 \dots \cdot 10^{-5} \text{ kalkulator)}$$

$$E = 2,40 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Vi får } \pi \approx 4 \cdot S_4 \approx 3,14, \text{ med feil } 2,40 \cdot 10^{-5}$$

2

a) Vi lager en funksjon for avstanden d som varierer med x basert på sirkellikningen, der d er avstand fra $g(x)$ til $(1,0)$

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (f(x)-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (4-x^2)^2}$$

videre lar vi $g(x) = (d(x))^2$

$$g(x) = (x-1)^2 + (4-x^2)^2$$

Vi legger merke til at i ekstremalpunkter for d , har også

g tilsvarende toppunkt (topp $\Rightarrow$ topp og bunn $\Rightarrow$ bunn)

samtidig vil g og d øke og minke for samme verdier ettersom g avhenger av d .

Hvis $(c, f(c))$ er nærmest $(1,0)$, er dette bunnpunkt

for d og $g \Rightarrow g'(c) = 0$

$$g(x) = (x-1)^2 + (4-x^2)^2 = x^2 - 2x + 1 + 16 - 7x^2 + x^4$$

$$g(x) = x^4 - 7x^2 - 2x + 17$$

$$g'(1) = 4 - 14 - 2 = -12$$

$$g'(x) = 4x^3 - 14x - 2$$

$$g'(2) = 4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 - 2 = 2$$

$g'(x)$ er et polynom $\Rightarrow$ den er kontinuertlig.

Skjæringssatsen gir at siden

$$g'(1) = -12 \quad \text{og} \quad g'(2) = 2, \quad \text{må} \quad g'(x) = 0$$

finnes for $1 < x < 2$

Siden $g'(1) = -12$ vet vi at $g(x)$ og $d(x)$ synker i $x=1$

— $g'(2) = 2$ ————— " ————— stiger i $x=2$

$\Rightarrow$ Ekstremalpunktet for $x \in (1, 2)$ er et bunnpunkt

Konklusjon: Siden det finnes en minsteverdi for $d(x)$

for $x \in (1, 2)$, må det eksistere $x=c$ s. a.

$1 < c < 2$ og $(c, f(c))$ er det nærmeste punktet til $(1,0)$

Q.E.D.

2 b) Newtons: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Vi velger $x_1 = 2$ etter som $g'(2) = 2$, som er nærmere $g'(x) = 0$ enn $g'(1) = -12$.

Vi bruker Newtons for $g'(x)$:

$$g''(x) = 12x^2 - 14$$

$$\text{Vi får } x_1 = 2 \text{ og } x_{n+1} = x_n - \frac{4x^3 - 14x - 2}{12x^2 - 14}$$

$$\text{vi får: } x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,941176$$

$$x_3 = 1,938542$$

$$x_4 = 1,938537$$

$$\Rightarrow c = 1,9385 \text{ med 4 desimalers nøyaktighet}$$

$$\underline{c = 1,939 \text{ med 4 gjeldende siffer}}$$

3 Dersom $\{a_n\}$ er avtagende, er a_{n+1} mindre enn (eller lik)

$$a_n, \text{ og dermed er: } a_{n+1} - a_n \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) - a_n \leq 0$$

$$a_n + \frac{2}{a_n} - 2a_n \leq 0$$

$$\frac{2}{a_n} - a_n \leq 0, \cdot a_n$$

$$2 - a_n^2 \leq 0$$

$$\underline{a_n \geq \sqrt{2}}$$

Hvis vi klarer å bevise at $a_n > \sqrt{2}$, beviser

vi at $\{a_n\}$ er avtagende, at den er nedad begrenset av $\sqrt{2}$, og dermed også 0

Vi vil bevise at $a_n \geq \sqrt{2}$ for $n=1$ og
at dersom $n=k$ er sant $\Rightarrow n=k+1$ er sant
 $n=1$:

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) \geq \sqrt{2}$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow a_n \geq \sqrt{2} \text{ for } n=1$$

$n=k$: Vi antar at $n=k$ stemmer, dette medfører at:

$$a_{k+1} \geq \sqrt{2}$$

$n=k+1$:

$$a_{k+2} \geq \sqrt{2}$$

$$a_{k+2} = \frac{1}{2} \left(a_{k+1} + \frac{2}{a_{k+1}} \right) \geq \sqrt{2}; \text{ vi må bevise dette.}$$

$$\text{fra } n=k: a_{k+1} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(a_{k+1} + \frac{2}{a_{k+1}} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{vi får at: } \frac{1}{2} \left(a_{k+1} + \frac{2}{a_{k+1}} \right) \geq \sqrt{2}$$

hvilket medfører at: $a_{k+2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow a_n \geq \sqrt{2}$ for $n=k$ medfører at
 $a_n \geq \sqrt{2}$ for $n=k+1$

$a_n \geq \sqrt{2}$ er bevist ved induksjon $\square$

• $\Rightarrow \{a_n\}$ er avtagende og nedad begrenset av $\sqrt{2}$, og
dermed også nedad begrenset av 0

• Følgen konvergerer dersom grenseverdien eksisterer.

da er både

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\text{og } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$$

Siden $a = a$, vil $\lim_{n \rightarrow \infty}$ bli funnet ved

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right)$$

$$2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2} \Rightarrow$ følgen $\{a_n\}$ konvergerer. $\square$

Konklusjon

Ved induksjon: $\{a_n\}$ er avtagende og nedad begrenset av 0

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{2}$, dermed konvergerer $\{a_n\}$ Q.E.D.

$$4) \quad \sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2, \text{ vi vet at } N \geq n, \text{ vi får:}$$

Venstre side (V.S.):

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2$$

Høyre side (H.S.):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_N)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + \dots + 2a_1a_N + 2a_2a_N + a_N^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_N + a_2a_N) \end{aligned}$$

Vi observerer at $V.S. = H.S. + 2(a_1a_2 + a_1a_N + a_2a_N)$

Siden $a_n \geq 0$ for alle n , er $2(a_1a_2 + a_1a_N + a_2a_N)$

positiv, hvilket medfører at $V.S. \leq H.S.$, og dermed at:

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2 \quad \text{Q.E.D.}$$

4) Bævis at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverger.

Fra tidligere i opgaven har vi at

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2, \text{ vi vet videre at } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger, og}$$

$$\text{vi har } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b. \text{ Vi får:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = b^2, \text{ vi lar videre } c = b^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq c \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq c \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n^2 \text{ finnes } (\leq c)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konverger } \square$$

Konklusjon

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)^2 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konverger}$$

Q.E.D.