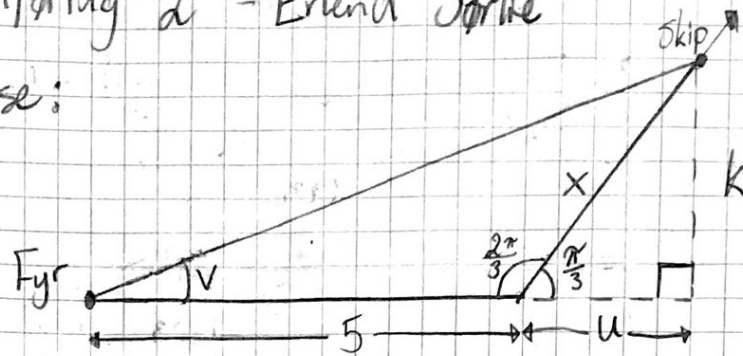


Innføring 2 - Ertend Sørlie

1 a) Skisse:



Hvis vi forlenger det høstliggende katetet til V ,
og trekker en normal fra skipet og ned til
forlengelsen, får vi en ny trekant, den er rettvinklet.
Av skissen ser vi at $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{u}{x}$

Vi kan nå regne ut k ved pythagoras: $u = \frac{1}{2}x$

$$k^2 = x^2 - u^2 = x^2 - (\frac{1}{2}x)^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2$$

$$k = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Ved å legge sammen de to trekantene får vi en
rettvinklet trekant med katetene $k = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ og $5+u = 5+\frac{1}{2}x$

Vi får:

$$\tan V = \frac{\text{motstående katet}}{\text{høstliggende katet}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{5+\frac{1}{2}x} = \frac{\sqrt{3}x}{10+x}$$

$$\tan V = \frac{x\sqrt{3}}{x+10} \quad \text{Q.E.D.}$$

b) fra a) har vi at V og t henger av hverandre, og et
forholdet vi utledet er sant for alle t . Dermed:

$$\tan V = \frac{x\sqrt{3}}{x+10} = \sqrt{3} \cdot \frac{x}{x+10} \quad \frac{1}{\frac{d}{dt}}$$

$$\frac{V'(t) \cdot \sec^2 V}{\sqrt{3}} = \frac{x'(t) \cdot (x+10) - x(x'(t))}{(x+10)^2} = \frac{x'(t) \cdot x - x'(t) \cdot x + x'(t) \cdot 10}{(x+10)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{V'(t)}{\cos^2 V} = \frac{x'(t) \cdot 10}{(x+10)^2} \Rightarrow x'(t) = \frac{(x+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{V'(t)}{\cos^2 V}$$

Q.E.D.

c) Vi setter $v = \frac{\pi}{6}$ inn i uttrykket fra a) for å finne x :

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$$

$$3x = x+10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Siden x er avstand per tid, er $x'(t)$ farten.

$$x'(t) = \frac{(x+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{v'(t)}{\cos^2 v} \quad \left[x=5, v=\frac{\pi}{6}, v'(t)=1 \right]$$

$$= \frac{15^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{4}{3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$x'(t) = 10\sqrt{3}$$

Skipet seiler med en fart på $10\sqrt{3}$ knop ($\frac{\text{nautiske mil}}{\text{time}}$)

2

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \cdot \exp\left(-\frac{2i^2}{n^2}\right)$$

siden n er et tall, og $\frac{1}{n^2}$ dermed er konstant
og $\exp$ betyr e opphøyet i , får vi:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} \cdot e^{-\frac{2i^2}{n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} \cdot e^{-\frac{2i^2}{n^2}}, \text{ vi velger } x_i = \frac{i}{n}.$$

Definisjonen av en Riemannsum sier at:

$a = a_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ er partisjon P_n av $[a, b]$, og $\Delta x_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$a=0, b=1. \Delta x_i = \frac{i}{n} - \frac{(i-1)}{n} = \frac{i-i+1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{n}$$

Vi får at $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1$, så Δx_i stemmer med definisjon

$[0, 1]$ er delt i $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ like deler. $\bar{x} = x_i, \Delta x =$

Vi får at $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \exp\left(-\frac{2i^2}{n^2}\right)$ kan skrives som:

$$\underline{f(x) = x \cdot e^{-2x^2}}$$

Se neste ark for resten av oppgaven.

2

Frå definisjonen av integral till en rektangulsum har vi at:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |P_n| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(x_i), \text{ fr  første delen av oppg ven} \\ \text{f r vi at:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \cdot \exp\left(-2 \frac{i^2}{n^2}\right) = \int_0^1 x \cdot e^{-2x^2} dx = *$$

$$* = \int_0^2 x \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{4x} = \int_0^2 \frac{e^{-u}}{4} du = *$$

$$* = \left[-\frac{e^{-u}}{4} \right]_0^2 = -\frac{1}{4e^2} - \left(-\frac{e}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

$$\begin{aligned} u &= 2x^2 \\ du &= 4x dx \\ dx &= \frac{du}{4x} \\ x=0 &\Rightarrow u=0 \\ x=1 &\Rightarrow u=2 \end{aligned}$$

Vi f r funksjonen $f(x) = x \cdot e^{-2x^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \cdot \exp\left(-2 \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

3

Vi bruker delvis integrasjon. Vi skriver om integralet s  nn det er et egentlig integral.

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cos x dx, \text{ s  lenge lim}_{b \rightarrow \infty} \text{ eksisterer.}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-ax} \cdot \sin x \right]_0^b - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b -ae^{-ax} \sin x dx = *$$

$[u = e^{-ax}, v' = \cos x]$ $[u = -ae^{-ax}, v' = \sin x]$

$$* = 0 - \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-ae^{-ax} \cdot (-\cos x) \right]_0^b - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (-ae^{-ax}) (-\cos x) dx \right) = *$$

Se neste ark for resten

$$3 \quad \lim_{b \rightarrow \infty} [ae^{-ax} \cdot \cos x]_0^b = -a$$

$$* = -(-a + a^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx) = a - a^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx$$

Vi får dermed at

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx = a - a^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx$$

$$(1 + a^2) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx = a$$

Vi får at grenseverdien kan uttrykkes ved

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} \cdot \cos x \, dx = \frac{a}{a^2 + 1} \quad \text{der } a > 1$$

antakelsen om at $\lim_{b \rightarrow \infty}$ finnes, stemmer.

siden grenseverdien er gitt ved a , vil $\left(\frac{a}{a^2 + 1}\right)' = 0$, gi størst grenseverdi

$$\left(\frac{a}{a^2 + 1}\right)' = 0$$

$$\frac{a^2 + 1 - a \cdot 2a}{(a^2 + 1)^2} = 0$$

$$\frac{1 - a^2}{(a^2 + 1)^2} = 0$$

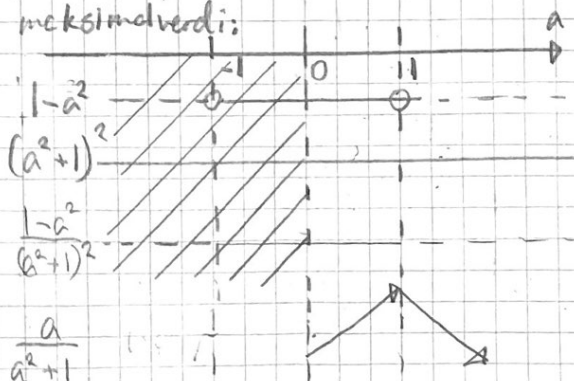
$$1 - a^2 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$\underline{a = 1}$$

Vi kan bruke fortegnsskjema

for å verifisere at $a = 1$ gir
maksimalverdi:

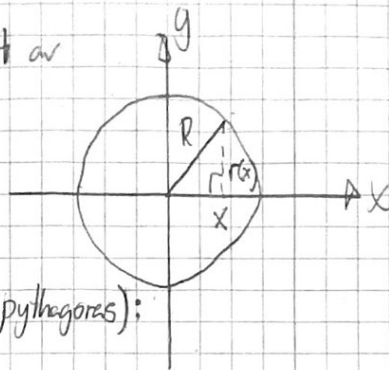


$\Rightarrow a = 1$ er et toppunkt
maksverdi er da $\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

$a = 1$, størst mulig verdi er $\frac{1}{2}$

4

Dersom vi tenker oss et tverrsnitt av kule der sentrum er i origo $(0,0)$ for vi denne skissen:



og vi får funksjonen $r(x)$ for høyden av kule over x -aksen (ved pythagoras):

$$R^2 = x^2 + (r(x))^2$$

$$r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Vi tenker oss nå kule i 3D, med sentrum i origo:

$0 \leq y \leq r(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$, der vi roterer $r(x)$ rundt y -aksen. Vi kan bruke Sylinderskallmetode, og volum er gitt ved:

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot r(x) dx$$

Siden kule har en side under $x=0$, får vi dobbelt volum

$$V = 4\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad \text{vi lar:} \quad \begin{cases} u = R^2 - x^2 \\ du = dx(-2x) \\ dx = -\frac{du}{2x} \end{cases}$$

Vi får:

$$V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x \cdot \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{du}{2x}\right) = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} -\sqrt{u} du = -2\pi \int_{x=a}^{x=b} u^{1/2} du = *$$

$$* = -2\pi \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{x=a}^{x=b} = -2\pi \left[\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_a^b = *$$

$$* = -\frac{4\pi}{3} \left((R^2 - b^2)^{3/2} - (R^2 - a^2)^{3/2} \right) = \frac{4\pi}{3} \left((R^2 - a^2)^{3/2} - (R^2 - b^2)^{3/2} \right)$$

$$\underline{\underline{V = \frac{4\pi}{3} \left((R^2 - a^2)^{3/2} - (R^2 - b^2)^{3/2} \right)}}$$

