

Oppgave 1

Innlevering 1

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt{|x|}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \boxed{f(0) = 0}$$

$\ln(1 + \sqrt{|x|})$ er kontinuerlig siden det er en logaritmisk funksjon og $\sqrt{|x|}$ alltid vil være definert.

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ er kontinuerlig for $x \neq 0$ siden sinus er en kontinuerlig funksjon.

Vi må sjekke kontinuitet i $x = 0$

Siden sinusfunksjoner gir ut verdier $[-1, 1]$, vil:

$$-\ln(1 + \sqrt{|x|}) \leq \ln(1 + \sqrt{|x|}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \ln(1 + \sqrt{|x|})$$

Skvise teoremet gir da at:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(1 + \sqrt{|x|}) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{|x|}) = L$$

$$\Rightarrow \ln(1 + \sqrt{|x|}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

Vi sjekker:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(1 + \sqrt{|x|}) = -\ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{|x|}) = \ln 1 = 0$$

Skvise teoremet gir oss dermed at:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{|x|}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{|x|}) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0 \Rightarrow f \text{ er kontinuerlig} \quad \square$$

Innlevering 1

Oppgave 2

$y(x)$ er gitt ved likningen $x \cdot y + e^y = e$

vi ønsker å finne y'' , vi deriverer

derfor likningen to ganger:

$$I: x \cdot y + e^y = e$$

I til II: Vi deriverer I, kjerneregelen og produktregelen gir II

$$II: y + x \cdot y' + y' e^y = 0$$

$$y' + y' + x y'' + y'' e^y + (y')^2 e^y = 0$$

$$x y'' + y'' e^y = -2y' - (y')^2 e^y$$

$$III: y'' = \frac{-2y' - (y')^2 e^y}{x + e^y}$$

II til III: Vi deriverer II ved bruk av kjerneregelen og produktregelen får vi et uttrykk med y'' . Omformer dette med hensyn på y'' og får III

For å finne $y''(0)$, trenger vi å vite

$y'(0)$ og $y(0)$. Det kan vi bruke I og II til.

setter inn $x=0$ i I:

$$0 \cdot y + e^y = e$$

$$e^y = e$$

$$y = 1$$

setter inn $x=0$ og $y=1$ i II:

$$1 + 0 \cdot y' + y' e^1 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{e}$$

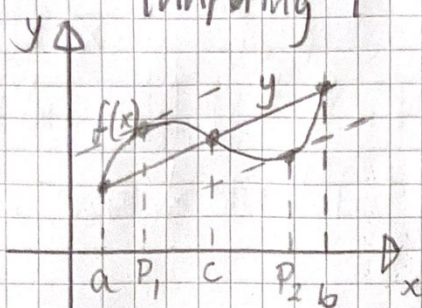
i $x=0$ er $y=1$, $y' = -\frac{1}{e}$, setter inn i III:

$$y'' = \frac{-2(-\frac{1}{e}) - (-\frac{1}{e})^2 \cdot e^1}{0 + e} = \frac{\frac{2}{e} - \frac{1}{e}}{e} = \frac{1}{e^2}$$

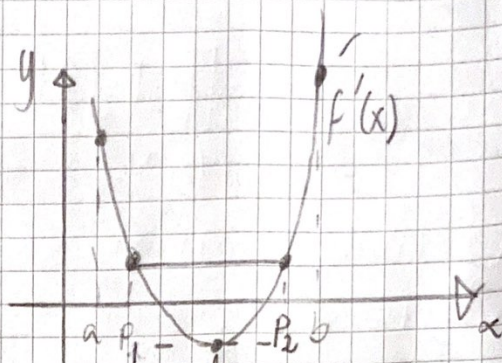
$$\underline{\underline{y''(0) = \frac{1}{e^2}}}$$

Oppgave 3

Innføring 1



Skisse 1



Skisse 2

A, B og C
ligger på
linje

- Vi definerer $A: (a, f(a))$, $B: (b, f(b))$ og $C: (c, f(c))$
- Vi lar linja AB være definert som $y(x) = mx + n, x \in [a, b]$

$$\Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

- Siden f er dobbelt deriverbar for $x \in [a, b]$, er f, f' og f'' kontinuertlige for $x \in [a, b]$.

- Så lenge $f(x)$ er forskjellig fra $y(x)$ for $x \in (a, c)$ og $x \in (c, b)$, gir sekantsetningen oss at det finnes $p_1 \in (a, c)$ og $p_2 \in (c, b)$ slik at: (Se skisse 1)

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(p_1) \Rightarrow f'(p_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(p_2) \Rightarrow f'(p_2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Ved å bruke sekantsetningen på f' , får vi at $d \in (p_1, p_2)$ slik at:

$$\frac{f'(p_2) - f'(p_1)}{p_2 - p_1} = f''(d) \Rightarrow f''(d) = \frac{m - m}{p_2 - p_1} = 0$$

$\Rightarrow f''(d)$ finnes.

Dersom f ikke er atskilt fra AB for $x \in [a, b]$, er $f(x) = y(x) = mx + n \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f''(d) = 0$ finnes.

- Vi har vist at for et skjæringspunkt C på AB, må $f''(d) = 0$ finnes. Ved eksisten av flere skjæringspunkter på AB, vil $f''(d) = 0$ måtte finnes, ettersom man kan bruke beviset på de 3 første punktene på linja.
- $\Rightarrow f''(d) = 0$ når $d \in (a, b)$ må eksistere $\square$

Oppgave 4 $\sin(x)$ er entydlig innerfor $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \forall \sin x \in [-1, 1], \Rightarrow \sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

Df $\arcsin = \forall x \sin(x) \in [-1, 1]. \Rightarrow \arcsin(x)$ er definert og entydlig for $x \in [-1, 1]$

$f(x)$ har en invers funksjon dersom den er entydlig.

$$\text{Da er } -1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1. \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = 1. \quad 1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1 \text{ når } x \in [-\frac{1}{2}, \rightarrow)$$

Dermed er $f(x)$ entydlig og har en invers funksjon $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$f(y) = \arcsin\left(\frac{y}{1+y}\right) = x \quad [\text{L ser for } y]$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{y}{1+y}\right)\right) = \sin x$$

$$\frac{1+y}{y} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$$

$$y = \frac{\sin x}{1 - \sin x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$$

$D_{f^{-1}} = \forall x : \forall f$ finnes for $x \in [-\frac{1}{2}, \rightarrow)$ (Dette er delvis beregnet lenger opp.)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad f \Rightarrow \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} \text{ og } D_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$